TẠP CHÍ KHOA HỌC GIÁO DỤC VIỆT NAM
ISSN 2615-8957; e-ISSN 3030-4490
Tập 22, Số 04 (2026)

VIETNAM JOURNAL OF EDUCATIONAL SCIENCES
ISSN 2615-8957; e-ISSN 3030-4490
Vol. 22, No. 04 (2026)

HELPING LEARNERS FIND THE SOLUTION TO THE PROBLEM ILLUSTRATED THROUGH THE PROOF EXERCISE IN PLANE GEOMETRY

Pham Duc Quang

Email: phamducquang@hpu2.edu.vn

Hanoi Pedagogical University 2
32 Nguyen Van Linh street, Xuan Hoa ward,
Phu Tho province, Vietnam

Received: 05/10/2025
Revised: 14/11/2025
Accepted: 10/02/2026
Published: 20/4/2026

Abstract: Mathematical exercises play a crucial role in teaching Mathematics, as they serve both teaching and developmental functions. However, finding a solution to such a problem is always difficult. G. Polya, in his work "How to solve a problem," provided a suggested approach to finding a solution to a problem, with four basic steps. Besides, this is not a strict process where simply following it will yield results; rather, it is a process of thinking that connects the given information with what needs to be found. Teaching practices in Vietnam show that most teachers focus solely on correcting exercises and do not adequately support students in finding solutions, which would enable them to learn mathematics confidently. Therefore, it is essential to help learners understand G. Polya's hints so they know how to solve the problem. This paper uses theoretical research, retrospective literature review, and initial experimentation to present an understanding and guide learners in Vietnam on how to find solutions to the problem, based on Polya's suggestions, illustrated through proof problems in plane geometry.

Keywords: *Polya's suggestion, functions of mathematical exercises, plane geometry; method of drawing auxiliary figures, Mathematical proof type.*

GIÚP NGƯỜI HỌC TÌM ĐƯỢC LỜI GIẢI CỦA BÀI TOÁN MINH HOẠ QUA DẠNG TOÁN CHỨNG MINH TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

Phạm Đức Quang

Email: phamducquang@hpu2.edu.vn

Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2
Số 32, Nguyễn Văn Linh, phường Xuân Hoà,
tỉnh Phú Thọ, Việt Nam

Nhận bài: 05/10/2025
Chỉnh sửa xong: 14/11/2025
Chấp nhận đăng: 10/02/2026
Xuất bản: 20/4/2026

Tóm tắt: Bài tập toán học có vai trò quan trọng trong dạy học Toán, vì nó vừa có chức năng dạy học vừa có chức năng phát triển. Tuy nhiên, tìm lời giải của một bài toán như thế nào luôn là vấn đề không dễ trả lời. G.Polya trong tác phẩm *Giải bài toán như thế nào* đã đưa ra bản gợi ý tìm lời giải một bài toán với 4 bước cơ bản. Tuy nhiên, đây không phải là quy trình nghiêm ngặt, cứ làm theo là có kết quả, mà đó là quá trình tư duy, để chắp nối giữa cái đã cho và cái phải tìm. Thực tiễn dạy học ở nước ta cho thấy, đa số người dạy chỉ tập trung chữa bài tập mà chưa chú trọng giúp người học tìm lời giải, để có thể tự tin học tập toán. Vì thế, giúp người học hiểu được bản gợi ý của G.Polya để biết cách tìm lời giải bài toán là hết sức cần thiết. Bài viết sử dụng nghiên cứu lí luận, để hồi cứu tư liệu và bước đầu thử nghiệm, rồi trình bày cách hiểu và giúp người học ở nước ta biết cách tìm lời giải bài toán, dựa theo bản gợi ý của Polya, minh hoạ qua dạng Toán chứng minh trong hình học phẳng.

Từ khóa: *Bản gợi ý của Polya, chức năng của bài tập toán học, hình học phẳng; phương pháp kẻ hình phụ, dạng Toán chứng minh.*

1. Đặt vấn đề

Với đa số người học ở nước ta, môn Toán là không dễ, nhất là khi gặp bài toán dạng chứng minh trong Hình học phẳng, đòi hỏi phải suy luận chặt chẽ để tìm ra lời giải, do đó, thường ngại học. Có nhiều nguyên nhân dẫn đến việc ngại học này, mà một trong những nguyên nhân chính là người học chưa được dạy cách học toán một cách bài bản, nhất là chưa được dạy về cách tìm lời giải của bài toán. Trong tác phẩm *Giải bài toán như thế nào*, G. Polya đã đưa ra bản gợi ý tìm lời giải bài toán. Tuy nhiên, ở nước ta đọc hiểu phần hướng dẫn này là không dễ hiểu với nhiều người học toán và người dạy toán. Vì thế, làm thế nào để giúp người giải toán có thể hiểu

https://doi.org/10.15625/2615-8957/12610405

được những chỉ dẫn đó vẫn còn là câu hỏi cần được làm rõ thêm. Bài viết này giới thiệu cách hiểu bản gợi ý của G.Polya để giúp người học biết cách tìm lời giải của bài toán, thông qua dạng Toán chứng minh trong hình học phẳng.

Do đặc thù ngôn ngữ, mỗi người đọc bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G.Polya đều có thể có cách hiểu riêng và vận dụng theo ý mình. Chẳng hạn, đến nay ở nước ta, Đỗ Thị Trinh (2017), bước đầu vận dụng bản gợi ý để hướng dẫn cách tìm lời giải bài toán bằng phép biến hình, trọng tâm là làm rõ thêm ở bước nghiên cứu kết quả giải toán. Các tác giả Phí Thị Thuỳ Vân (2006), Phạm Thị Trà My (2013), Lê Thị Hoà Bình (2014), nghiêng về xây dựng kịch bản dạy học, thông qua hỏi đáp giữa giáo viên và học sinh. Tuy mỗi cách tiếp cận đó có ý nghĩa nhất định nhưng thiết nghĩ sẽ tốt hơn nếu người dạy phân tích, làm rõ, giúp người học đọc hiểu bài toán nhằm chắp nối được liên hệ giữa logic cái đã cho và cái phải tìm, theo tư tưởng của G.Polya. Một số tác giả có đề cập *các bước giải bài toán* nhưng không bám theo tư tưởng của G.Polya, như Cao Thị Hà (2024). Ở nước ngoài, bản gợi ý của G.Polya cũng được nghiên cứu và vận dụng, như A.Gray (2018), áp dụng trong giải toán cao cấp cho sinh viên, còn Theresa Ugonwa Okafor (2019), vận dụng giải bài tập Vật lí ở Trung học cơ sở.

Do đó, giúp người giải toán hiểu thấu bản gợi ý của G.Polya để có thể suy nghĩ, chắp nối liên hệ giữa logic giữa cái đã cho trong giả thiết và cái phải tìm, tiến tới, tự tìm được lời giải bài toán vẫn còn là vấn đề cần thiết và càng phải làm rõ hơn nữa. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ nêu ra cách hiểu và minh hoạ thông qua dạng Toán chứng minh trong hình học, như trình bày ở các mục 3.2, mục 3.3 và mục 4 dưới đây.

2. Phương pháp nghiên cứu

Khi nghiên cứu và trình bày bài viết này tác giả chủ yếu sử dụng *phương pháp nghiên cứu lí luận*, để hồi cứu tư liệu về cách giúp người học tìm lời giải bài toán, dựa vào bản hướng dẫn của G. Polya. Sau đó, minh hoạ tìm lời giải bài toán theo bản gợi ý của G. Polya qua dạng Toán chứng minh trong hình học phẳng.

Bên cạnh đó, chúng tôi sử dụng *phương pháp tìm hiểu thực tiễn*, phỏng vấn sâu để đánh giá sơ khởi, nhằm sơ bộ tìm hiểu xem người học đã có hiểu biết như thế nào về tìm lời giải của bài toán. Hơn nữa, chúng tôi có sử dụng *phương pháp thực nghiệm sư phạm* trực tiếp dạy nhằm bước đầu kiểm nghiệm tính khả thi của cách làm này với đối tượng sinh viên Sư phạm Toán ở Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2. Sau đó, chúng tôi có sử dụng *phương pháp tổng kết kinh nghiệm,* thông qua đánh giá tổng kết với hình thức thi vấn đáp (áp dụng với bài thi cuối học phần), để kiểm nghiệm hiệu quả.

3. Kết quả nghiên cứu

3.1. Vai trò của bài tập Toán học

Theo Nguyễn Bá Kim (2011), bài tập toán có vai trò quan trọng, như giá mang cho các hoạt động học tập. Để hiểu được bài tập toán người học cần thực hiện các hoạt động nhận dạng, thể hiện định nghĩa, định lí, quy tắc hay phương pháp; những hoạt động trí tuệ phổ biến, hoạt động trí tuệ chung, hoạt động ngôn ngữ. Để tìm được lời giải của bài tập toán, người học còn phải huy động vốn hiểu biết và vận dụng các hoạt động như tư duy logic, khái quát hóa, phân tích, tổng hợp. Nhờ đó, có thể củng cố kiến thức, kĩ năng, kĩ xảo cần thiết, đồng thời phát triển khả năng tư duy độc lập, sáng tạo. Về phương diện nội dung, bài tập toán là công cụ để củng cố, mở rộng và hệ thống hóa kiến thức, giúp người học liên hệ, bổ sung và khắc sâu những khái niệm, định lí đã học. Về phương diện phương pháp, bài tập toán là cơ hội để tổ chức hoạt động học tập chủ yếu, cho phép người học chủ động chiếm lĩnh kiến thức, thông qua tự học, thảo luận hoặc trao đổi học thuật. Hơn nữa, trong khâu kiểm tra, đánh giá kết quả học tập, bài tập toán là phương tiện giúp đo lường kết quả học tập, mức độ hiểu biết cũng như khả năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn. Như vậy, bài tập toán không chỉ mang tính chất rèn luyện mà còn là cầu nối gắn kết giữa mục tiêu, nội dung và phương pháp dạy học, giữ vị trí trung tâm trong toàn bộ quá trình giáo dục Toán học.

Theo đó, trong quá trình dạy học, bài tập toán giúp hình thành, củng cố tri thức, kĩ năng, kĩ xảo cho người học (chức năng dạy học); hình thành cho người học thế giới quan, hứng thú học tập, niềm tin vào chân lí và giáo dục phẩm chất đạo đức của người lao động (chức năng giáo dục); phát triển năng lực tư duy của người học, đặc biệt là rèn luyện những thao tác trí tuệ, hình thành khả năng tư duy khoa học (chức năng phát triển); đánh giá được kết quả quá trình dạy - học, khả năng tiếp thu kiến thức và trình độ phát triển nhận thức của người học (chức năng kiểm tra). Do đó, việc dạy học Toán có đạt hiệu quả như mong muốn hay không phụ thuộc chủ yếu vào sự khai thác đúng đắn và thực hiện một cách đầy đủ các chức năng khác nhau của bài tập toán của người dạy, trong quá trình thiết kế và tổ chức bài học.

Trong môn Toán ở trường phổ thông, dạng Toán chứng minh có thể hiểu là những bài tập yêu cầu sử dụng lập luận logic chặt chẽ, dựa trên cái đã cho trong giả thiết và các định nghĩa, tiên đề, định lí đã biết để xác nhận một phát biểu (hay tính chất, đẳng thức) là đúng chứ không chỉ dựa vào cảm nhận cá nhân để khẳng định kết quả. Theo đó, người giải toán cần làm rõ một chuỗi các thao tác tư duy, suy diễn logic, sao cho từ giả thiết của bài toán có thể đi đến được kết luận, nhờ đó, khẳng định được tính đúng đắn của lời giải bài toán.

3.2. Tư tưởng cơ bản của G.Polya về tìm lời giải bài toán

G.Polya (2009) đưa ra bản gợi ý tìm lời giải bài toán, mà tư tưởng chính thể hiện qua 4 bước sau:

Bước 1: *Hiểu bài toán*. Ở bước này, người giải toán cần trả lời được các câu hỏi chính yếu, như: Cái gì đã cho, cái gì cần tìm; dạng toán nào (Hình học, Đại số,… tính toán, chứng minh,...); có bài toán nào tương tự (đã biết cách giải trước đó) không; những kiến thức cần có để giải bài toán này là gì; có thể chuyển bài này thành bài khác tương tự, quen thuộc hơn không?

Bước 2: Xây dựng chương trình giải. Nhờ hiểu bài toán như đã nêu ở bước 1, ở bước này, người giải toán có thể xây dựng chương trình giải bài toán, đề xuất trình tự thực hiện, sao cho từ những gì đã cho trong giả thiết có thể đi đến được kết quả bài toán.

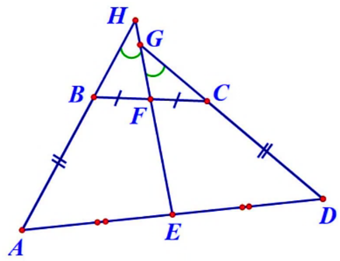
Bước 3: *Trình bày lời giải*. Từ những gì đã được phát hiện, tìm tòi ở các bước 1 và 2 ở trên, người giải toán phải tổng hợp, rồi sắp xếp lại ý tưởng theo một trình tự và trình bày cách hiểu của mình về liên hệ giữa cái đã cho với cái phải tìm, tạo thành một lời giải, thống nhất, logic và hợp lí.

Bước 4: *Nghiên cứu kết quả giải bài toán*. Ở bước này, trước hết, người giải toán cần kiểm tra lại lời giải đó có đúng hay không, lập luận có chặt chẽ hay không? Sau đó, dựa vào kết quả thu được khi giải bài tập ban đầu mà khái quát thành dạng toán, nêu phương pháp chung để giải dạng toán đó. Hơn nữa, cần tìm thêm cách giải khác, rồi phát triển nó thành một dạng tổng quát để đề xuất các bài tập tương tự (nhờ cụ thể hoá hay đặc biệt hóa) hoặc đề xuất bài toán mới, dựa trên kết quả tìm được….

3.3. Tìm lời giải bài toán dựa theo bản gợi ý của G. Polya

Ở phần này, chúng tôi sẽ minh hoạ về hướng dẫn người học tìm lời giải bài toán, dựa vào bản gợi ý của G. Polya và minh hoạ qua dạng Toán chứng minh trong hình học phẳng với bài toán sau (xem Hình 1): "*Cho tứ giác ABCD, có AB = CD, còn E và F tương ứng là trung điểm của AD và BC, hai cạnh AB và CD kéo dài cắt FE tương ứng ở H và G (ở về cùng phía với BC). Chứng minh rằng:* $\widehat{AHE} = \widehat{DGE}$". Chúng tôi cho rằng, dạng toán này minh hoạ rõ nét các bước trong bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G.Polya, cụ thể như phần trình bày dưới đây.

Bước 1: *Hiểu bài toán.*



Hình 1

1) *Cái gì đã cho?* (Thông thường, khi chưa hiểu sâu bản gợi ý của G. Polya, thường người giải toán chỉ chép lại như giả thiết trong đề bài của bài toán).

2) *Cái gì phải tìm?* (Thông thường, khi chưa hiểu sâu bản gợi ý của G. Polya, người giải toán thường chỉ chép lại như yêu cầu trong đề bài của bài toán, với bài này là *Chứng minh* $\widehat{AHE} = \widehat{DGE}$).

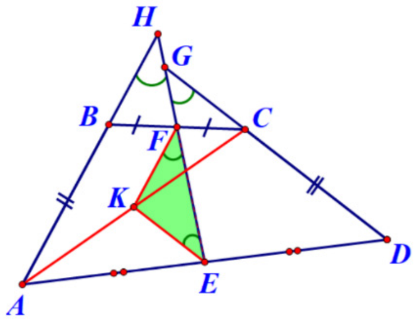
Chú ý rằng, để hiểu bài toán người giải toán cần phân tích, làm rõ những gì đã cho trong giả thiết, mối liên hệ logic giữa cái đã cho và cái phải tìm, cho đến khi tìm thấy gắn kết giữa chúng cũng là tìm được lời giải của bài toán này. Cụ thể, với bài nói trên:

Cái đã cho là tứ giác ABCD, có AB = CD (giả thiết 1). Tuy nhiên, hai đoạn AB và CD lại ở xa nhau, nếu ghép được hai đoạn cùng có độ dài đó sao cho có chung một đầu mút thì sẽ tạo được một tam giác cân, có hai góc ở đáy bằng nhau, liên quan đến cái phải tìm. Tương tự, hai góc cần chứng minh bằng nhau đang ở vị trí không liên quan đến các hình có thể gợi ra tính bằng nhau của chúng. Vì thế, cần chuyển đổi hai góc này về vị trí của hai góc nào đó, mà có thể dễ dàng hơn khi xét tính bằng nhau của chúng. Theo đó, người giải toán cần sử dụng các tính chất đã học, như hai góc đồng vị, hai góc so le trong,… để chuyển đổi thích hợp. Như vậy, kết hợp cả AB = CD và $\widehat{AHE} = \widehat{DGE}$ cho phép người giải toán nghĩ đến việc phải tạo ra một tam giác cân, có hai góc ở đáy tương ứng bằng hai góc $\widehat{AHE}$, $\widehat{DGE}$.

Trong hình học phẳng, để có thể biến đổi một đoạn thẳng (hay một góc) thành một đoạn thẳng (hay một góc) bằng nó thường phải sử dụng tính chất của các hình đã học, có các yếu tố bằng nhau,

https://doi.org/10.15625/2615-8957/12610405

chẳng hạn, hình bình hành có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau hay tam giác cân có hai góc ở đáy bằng nhau... Do đó, nếu lấy một đoạn thẳng đã cho để tạo dựng hình bình hành thích hợp thì tạo ra một đoạn thẳng bằng nó,… Theo đó, người giải toán cần quy lạ (cái chưa biết rõ) về quen (là cái biết rõ), tức là phải kẻ thêm hình phụ thích hợp, sao cho sử dụng được các yếu tố đã cho đó.



Hình 2

Nhìn vào tứ giác ABCD được cho thì chưa tìm ngay được mối liên hệ giữa cái đã cho và cái phải tìm, nhưng nếu để ý đến đường chéo (AC chẳng hạn), chia tứ giác đó thành hai tam giác (xem Hình 2). Khi đó, kết hợp thêm giả thiết (thứ hai) F (hay E) là trung điểm của BC (hay AD), giúp người giải toán nghĩ đến đường trung bình của tam giác. Khi đó, nếu chọn K là trung điểm AC thì KF là đường trung bình của △CBA, suy ra AB // KF và AB = 2KF. Tương tự, có KE là đường trung bình của △ACD, suy ra CD // KE và CD = 2KE. Do AB = CD (giả thiết 1) nên KE = KF, suy ra △FKE cân, khi đó $\widehat{KEF} = \widehat{KFE}$. Theo tính chất đường trung bình của tam giác, có AB // KF nên $\widehat{AHE} = \widehat{KFE}$, tương tự, từ CD // KE suy ra $\widehat{DGE} = \widehat{KEF}$. Tức là có $\widehat{AHE} = \widehat{DGE}$. Đến đây xem như lời giải của bài toán đã được lộ ra, sau khi đã khai thác hết mối liên hệ giữa các cái đã cho trong đề bài.

Như vậy, người giải toán đã khai thác hết cái đã cho trong đề bài để dẫn đến cái phải tìm, tức là đã hiểu được bài toán, hiểu hết các ẩn ý được cho trong giả thiết của bài toán này và sử dụng chúng một cách hợp logic. Do đó, muốn tìm được lời giải bài toán, bắt buộc người giải toán phải đọc kĩ cái đã cho, hiểu hết các tính chất về nó để khai thác từng khía cạnh, từng tính chất đã biết sao cho có thể kết hợp được tốt nhất các yếu tố được cho thì mới có thể tìm ra lời giải bài toán.

Bước 2: *Xây dựng chương trình giải bài toán.*

Để giải được bài toán này, người giải toán cần quy lạ về quen, theo các bước sau:

- Kẻ một đường chéo (nào đó) của tứ giác và xác định trung điểm của nó.

- Xác định đường trung bình của hai tam giác mà đường chéo đó tạo ra.

- Dựa vào tính chất đường trung bình của tam giác chỉ ra các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau.

- Dựa vào tính chất của tam giác cân để rút ra kết luận.

Chú ý: Chương trình giải bài toán, như đề cập ở đây, không phải là lời giải bài toán mà thường là phương pháp chung (hay cách nghĩ) để tìm được lời giải cho dạng toán đang gặp.

Bước 3: *Trình bày lời giải.*

Ở bước này, người giải toán cần trình bày được lời giải của bài toán, cụ thể:

Kẻ đường chéo AC của tứ giác ABCD (như mô tả ở Hình 2). Gọi K là trung điểm AC. Khi đó, KF là đường trung bình của △CBA, suy ra AB // KF và AB = 2KF. Tương tự, KE cũng là đường trung bình của △ACD, suy ra CD // KE và CD = 2KE, mặt khác, do AB = CD nên KE = KF, suy ra △FKE cân, tức là có $\widehat{KEF} = \widehat{KFE}$. Do AB // KF nên $\widehat{AHE} = \widehat{KFE}$ và từ CD // KE suy ra $\widehat{DGE} = \widehat{KEF}$. Tức là có $\widehat{AHE} = \widehat{DGE}$ (xem như Cách 1).

Chú ý rằng, nếu người học chỉ đọc lời giải có sẵn (như trình bày trên) thì thấy bài toán này không khó và có thể hiểu hết về nó. Tuy nhiên, người học sẽ không tự trả lời được tại sao lại tìm được lời giải ngắn gọn thế. Chỉ khi người học phải tự tìm lời giải bài toán này (đối mặt với thách thức) thì mới thấy bài toán này hoàn toàn không dễ và để tìm được lời giải cần hiểu bài toán, phân tích kĩ như trình bày như ở Bước *1*. Một khi tự tìm được lời giải, theo gợi ý trên, người giải toán sẽ cảm thấy mình đang phát minh lại lời giải bài toán và nhận thấy một bài toán không dễ mà lại có lời giải ngắn gọn, đẹp thế. Khi đó, người học mới cảm nhận được vẻ đẹp của Toán học, thông qua suy luận chặt chẽ để chứng minh được điều cần chứng minh và thấy được giữa cái đã cho và cái phải tìm có mối liên hệ logic chặt chẽ (không thừa, không thiếu). Tìm lời giải bài toán theo gợi ý ở trên *như một nghệ thuật (như trượt tuyết hay chơi đàn)*, ta có thể học được nghệ thuật đó nhờ chăm chỉ luyện tập, nhưng phải biết vượt khó, nhẫn nại, không nóng vội.

Bước 4: *Nghiên cứu kết quả lời giải*

Ở bước này, người giải toán cần thực hiện được các nhiệm vụ cơ bản sau:

1) Xét xem lời giải có đúng không? (đã sử dụng hết giả thiết hay chưa, có chỗ nào sử dụng những điều chưa được học hay không, có chỗ nào ngộ nhận

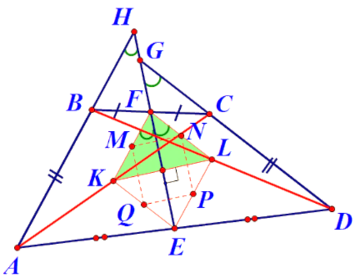
theo hình vẽ hay không, ở mỗi bước tiến hành kết quả có phải là duy nhất hay không…).

2) Bài toán đó thuộc dạng toán nào? (chứng minh hay tính toán… với bài này đó là dạng chứng minh 2 góc hay 2 đoạn thẳng bằng nhau).

3) Phương pháp chung để giải dạng toán đó là gì? (Kẻ thêm hình phụ, là đoạn thẳng, góc, tam giác... thích hợp; Để chứng minh 2 yếu tố bằng nhau, như góc hay đoạn thẳng, ta có thể tạo thêm yếu tố mới, tạo thành hình quen thuộc, đã biết tính chất của nó).

4) Có cách giải nào khác không? (khi đã biết dạng toán và phương pháp chung để giải như đã nêu, có thể tìm thêm một số cách giải khác).

5) Các bài toán tương tự (hoặc sáng tác thêm bài toán mới).

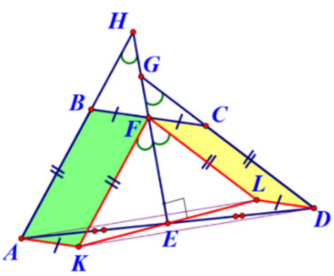


Hình 3

Trong khuôn khổ bài viết này, tác giả lồng ghép nội dung *(4)* và *(5)* ở Bước 4, như phần dưới đây. Hơn nữa, với mỗi cách (từ Cách 2 đến Cách 9) cũng chỉ xin trình bày lời giải của bài toán gốc và nêu bài toán mới (nếu có) mà không phân tích cách tìm ra lời giải bài toán gốc và không đưa lời giải của từng bài toán mới đó.

Cách 2: Kẻ hai đường chéo AC và BD của tứ giác ABCD. Gọi K, L tương ứng là trung điểm AC và BD (như mô tả ở Hình 3). Khi đó, KF = KE = EL = LF. Do đó, FKEL là hình thoi, suy ra EF là phân giác của $\widehat{KFL}$. Từ đó, suy ra $\widehat{AHE} = \widehat{DGE}$. Từ lời giải như ở Cách 2 có thể sáng tác thêm:

Bài 1. Thêm giả thiết: Gọi K, L tương ứng là trung điểm của AC và BD (xem Hình 3). Chứng minh rằng, KL ⊥ FE.

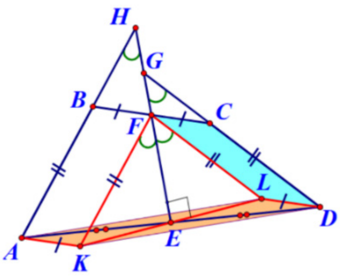


Hình 4

Bài 2. Thêm giả thiết: Gọi K, L tương ứng là trung điểm của AC và BD. Gọi M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của KF, FL, LE, EK (Hình 3). Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

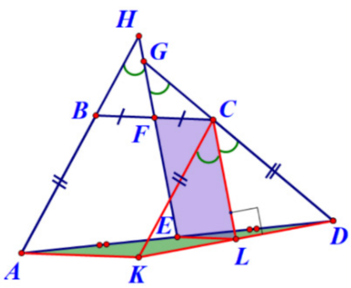
Cách 3: Dựng 2 hình bình hành BFKA và CFLD (như mô tả ở Hình 4). Khi đó, có FK = FL, AK // DL và AK = DL, suy ra AKDL là hình bình hành, mà EA = ED nên KL đi qua E. Lúc này △FKL cân và có FE là phân giác của $\widehat{KFD}$. Từ đó, suy ra điều cần chứng minh. Từ lời giải như ở Cách 3 có thể sáng tác thêm:

Bài 3. Thêm giả thiết: Dựng 2 hình bình hành BFKA và CFLD (xem Hình 4). Chứng minh rằng ba điểm K, E, L thẳng hàng và KL ⊥ FE.



Hình 5

Cách 4: Dựng 2 hình bình hành FCDL và DKAL (như mô tả ở Hình 5). Khi đó, có AK = DL và AK // LD, suy ra, AK // BF và AK= BF, do đó, AKFB là hình bình hành, suy ra AB = FK = FL = CD. Lúc này, △FKL cân và FE là một đường trung tuyến nên nó cũng là phân giác của $\widehat{KFL}$. Từ đó, suy ra điều cần chứng minh.



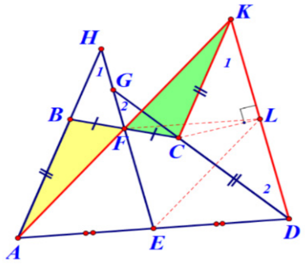
Hình 6

Cách 5: Dựng hình bình hành BCKA (như mô tả ở Hình 6), có CK = CD hay △KCD cân. Gọi L là trung điểm của KD thì EL là đường trung bình của △AKD, suy ra EL // FC và EL = FC, do đó, FCLE là hình bình hành, suy ra CL // FE, do đó $\widehat{KCL} = \widehat{AHE}$ và $\widehat{DCL} = \widehat{DGE}$. Từ đó, suy ra điều cần chứng minh. Từ lời giải như ở Cách 5 có thể sáng tác thêm:

Bài 4. Thêm giả thiết: Dựng hình bình hành BCKA (xem Hình 6). Gọi L là trung điểm của KD, chứng minh rằng KD ⊥ CL.

 https://doi.org/10.15625/2615-8957/12610405

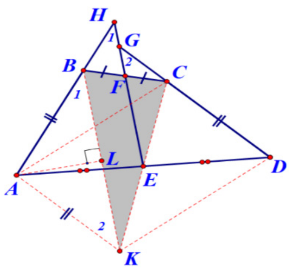
Cách 6: Kẻ DK // FE và DK cắt AF tại K (như mô tả ở Hình 7). Khi đó, FE là đường trung bình của △ADK, suy ra AF = FK. Từ đó, △AFB = △KFC (c.g.c), suy ra AB = CK và AB // CK. Lúc này △CDK cân (CD = CK), suy ra $\widehat{CDK} = \widehat{CKD}$. Từ đó, suy ra điều cần chứng minh. Từ lời giải như ở Cách 6 có thể sáng tác thêm:



Hình 7

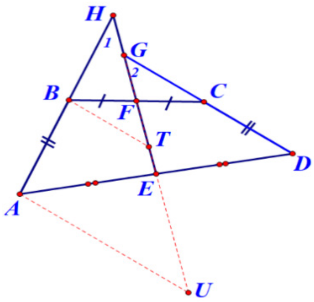
Bài 5. Thêm giả thiết: Dựng hình bình hành AFLE (xem Hình 7). Chứng minh rằng CL ⊥ DL.

Cách 7: Dựng hình bình hành ACDK (như mô tả ở Hình 8), suy ra AK = CD = AB và EK = EC, do đó, FE là đường trung bình của △CBK, suy ra BK // FE. Lúc này △ABK cân (AB = AK), suy ra $\widehat{AKB} = \widehat{ABK}$. Từ đó, suy ra điều cần chứng minh. Từ lời giải như ở Cách 7 có thể sáng tác thêm:



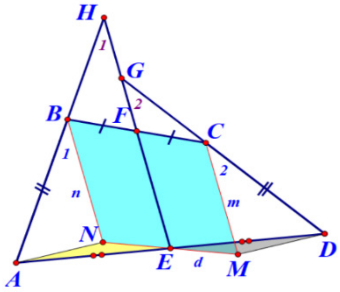
Hình 8

Bài 6. Thêm giả thiết: Dựng hình bình hành ACDK (xem Hình 8). Gọi L là trung điểm BK, chứng minh rằng AL ⊥ BK.



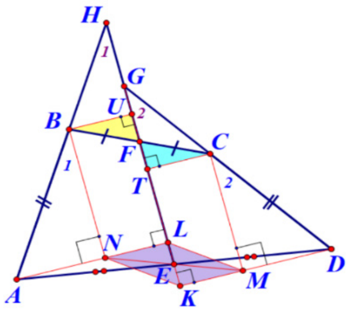
Hình 9

Bài 7. Thêm giả thiết: Kẻ BT // GD và AU // GD, với T, U thuộc FE (xem Hình 9). Chứng minh rằng: BT = BH; AH = AU.



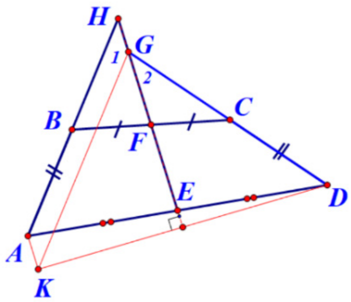
Hình 10

Cách 8: Qua điểm E vẽ đường thẳng d // BC. Qua từng điểm B và C vẽ tương ứng từng đường thẳng n, m cùng song song với HE. Gọi giao điểm của d với m, n tương ứng là M, N (như mô tả ở Hình 10), thì BCMN là hình bình hành. Do FB = FC nên EN = EM. Khi đó, △AEN = △DME (c.g.c), suy ra AN = MD. Do đó, △ABN = △DCM (c.c.c), suy ra $\widehat{ABN} = \widehat{DCM}$. Từ đó, suy ra điều cần chứng minh.



Hình 11

Cách 9: Kẻ BU và CT vuông góc với HE (như mô tả ở Hình 11), thì △BFU = △CFT, do đó, BU = CT và BU // CT. Kẻ AL và DK vuông góc với HE, thì △AEL = △DEK, do đó, EL = EK, AL = DK và AL // DK. Kẻ BN và CM tương ứng vuông góc với AL và DK, thì BNLU và CMKT là hình chữ nhật, suy ra, NL// KM và NL = KM, do đó NLMK là hình bình hành, mà EL = EK nên MN đi qua E. Khi đó, BCMN là hình bình hành, nên BN = CM, suy ra △BNA = △CMD, do đó, $\widehat{ABN} = \widehat{DCM}$. Từ đó, suy ra điều cần chứng minh. Từ lời giải như ở Cách 9 có thể sáng tác thêm:



Hình 12

https://doi.org/10.15625/2615-8957/12610405

Bài 8. Chứng minh rằng BH = CG.

Bài 9. Chứng minh rằng AH = DG.

Bài 10. Thêm giả thiết: Dựng hình bình hành AHGK (xem Hình 12). Chứng minh rằng KD ⊥ HE.

3.4. Bước đầu thử nghiệm và biện pháp triển khai

Nhằm bước đầu kiểm nghiệm tính khả thi của cách làm này, chúng tôi đã thực nghiệm, trực tiếp dạy học phần *DẠY HỌC CÁC TÌNH HUỐNG ĐIỂN HÌNH TRONG MÔN TOÁN*, với đối tượng sinh viên Sư phạm toán, năm thứ hai, từ năm học 2023 - 2024 đến năm học 2025 - 2026, ở Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2. Qua đó cho thấy:

3.4.1 Sơ bộ hiểu biết của người học về tìm lời giải bài toán

Ban đầu, qua phỏng vấn, nhằm đánh giá sơ khởi, cho thấy hầu hết người học chưa được tiếp cận với bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G. Polya và cũng gần như chưa hề đọc tác phẩm Giải bài toán như thế nào của G. Polya. Vì thế, hầu như người học không biết đến các bước để có thể tìm lời giải bài toán. Khi được hỏi, đa số người học đều quan niệm giải bài toán là trình bày lời giải của bài toán đó, theo cách mà mỗi em được học trước đây. Tức là, người dạy chỉ nghiêng về chữa bài tập toán (tìm được kết quả, như ở Bước 3) mà không dạy cách tìm lời giải bài tập toán.

Khi được giới thiệu và làm quen với bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G. Polya, sau khi tự đọc hiểu rồi trình bày, cho thấy hầu hết người học đều cho rằng, Bước 1, hiểu bài toán là đọc lại (hay chép lại y nguyên) giả thiết và nêu ra kết luận của bài đó. Nguyên nhân chính là do người học chưa tự tìm lời giải bài toán, mà trước đây thường chỉ nghe giảng và chép lời giải bài toán được giáo viên trình bày, sau đó học thuộc lời giải đó, tức là chỉ hiểu được lời giải chứ chưa thực sự hiểu bài toán. Tất nhiên, khi học theo cách này thì bài toán nào cũng không khó (vì đã có lời giải), song không thể tự tìm lời giải bài toán khác (có thể là bài tương tự). Hơn nữa, người học không xác định được dạng toán (là chứng minh hay tính toán,…), chưa biết phân tích để tìm liên hệ logic giữa cái đã cho và cái phải tìm, rồi từng bước tạo thêm mối liên hệ giữa chúng, tiệm cận với lời giải bài toán. Vì thế, người học chưa huy động được kiến thức cơ bản cần có để giải bài toán đặt ra. Còn ở Bước 2, xây dựng chương trình giải bài toán thì đa số người học đồng nhất với Bước 3, trình bày lời giải bài toán. Ở Bước 4, nghiên cứu kết quả lời giải thì không nhiều sinh viên trong lớp thực hiện, với một số em có làm thì cũng chỉ biết kiểm tra lại lời giải có đúng hay không mà không tự rút ra được dạng toán và phương pháp chung để giải nhằm làm sâu sắc và phong phú thêm vốn hiểu biết cho mình. Hầu như không có sinh viên nào biết cách khai thác lời giải để có thể sáng tác thêm bài tập mới (như đã trình bày ở trên).

3.4.2. Biện pháp

Trước thực trạng về hiểu biết của người học về tìm lời giải bài toán như mô tả trên, buộc người dạy (là tác giả bài viết) phải đưa ra một số biện pháp thích hợp, như trình bày dưới đây.

Trước hết, giúp người học tìm hiểu về vị trí, vai trò của bài tập toán, bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G. Polya, làm rõ các nhiệm vụ mà G. Polya khuyên làm, ở từng bước đó (như đã nêu ở mục 3.1 và 3.2 của bài viết này).

Tiếp theo, giúp người học sử dụng bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G. Polya để giải toán. Theo đó, giảng viên làm mẫu, phân tích kĩ từng nhiệm vụ cần thực hiện với từng bước, như được nêu trong bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G. Polya, qua ví dụ cụ thể, mà nội dung nêu ở mục 3.3 là một ví dụ. Sau đó, yêu cầu người học làm tương tự với một bài toán khác (không quá khó). Tiếp tới, yêu cầu về nhà người học tự chọn một bài toán (Đại số hay Giải tích) và hướng dẫn người học tìm lời giải, theo hiểu biết của mình, vào buổi học sau sẽ trình bày trước lớp, để mọi người cùng nghe, góp ý (nếu có). Tức là, giảng viên đã lồng ghép dạy lí thuyết tìm lời giải bài toán với thực hành tìm lời giải bài toán, giúp người học tự tìm lời giải bài toán thông qua ví dụ cụ thể. Kết hợp làm mẫu để người học hiểu kiến thức mới cần học đồng thời rèn kĩ năng thông qua yêu cầu tìm lời giải của một bài tập cụ thể và trình bày về những gì đã chuẩn bị.

Trên cơ sở người học đã biết tìm lời giải bài toán theo bản gợi ý của G. Polya, yêu cầu mỗi em sáng tác thêm bài toán (như đề cập ở trên), để tự làm phong phú thêm vốn hiểu biết, có thể tự tin khi được yêu cầu ra bài tập với nội dung được học. Nhờ đó, các em không lúng túng khi được yêu cầu ra đề kiểm tra, khi thực dạy ở trường phổ thông. Hơn nữa, cũng yêu cầu mỗi người học nêu cảm nhận về việc tìm lời giải bài toán (theo cách nêu trên), có nhận thấy vẻ đẹp của việc học và giải toán hay không, nhờ đó khích lệ tính ham học toán của từng em.

3.4.3 Kết quả ban đầu

Qua một vài tuần học và thực hành theo cách học như mô tả ở trên, nhìn chung người học đã tiến

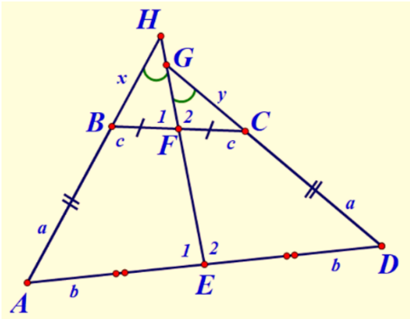
 https://doi.org/10.15625/2615-8957/12610405

bộ đáng kể, biết cách tự tìm lời giải bài tập toán (ở phổ thông) và biết cách hướng dẫn tìm lời giải theo các bước, trong bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G. Polya. Tức là, người học đã hiểu và có thể áp dụng được bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G. Polya trong tình huống mới. Chẳng hạn, một kết quả về hiểu bài toán ban đầu (nêu ở mục 3.3) như mô tả dưới đây:

BÀI TẬP TUẦN 12

Nhóm thực hiện: Trần.T.H.H - Dư.V.L - Lang.T.L - Ma.T.N - Nguyễn N.N.N - Nguyễn.N.B.T - Nguyễn.T.P.T

Hiểu bài toán: Cái đã cho là AB = a = CD, BF = c = FC, DE = b = EA.



Hình 13

Cái phải tìm là chứng minh $\hat{H} = \hat{G}$.

Gọi BH = x, CG = y (như mô tả ở Hình 13).

Ta thấy, trong tam giác BFH có $\hat{H}$ *đối diện cạnh c, trong tam giác AHE có* $\hat{H}$ *đối diện cạnh b. Tương tự, trong tam giác CGF có* $\hat{G}$ *đối diện cạnh c, trong tam giác DGE có* $\hat{G}$ *đối diện cạnh b. Từ liên hệ giữa góc và cạnh đối diện giúp ta nhớ đến định lý hàm số sin trong tam giác.*

Mặt khác, $\hat{F}_1, \hat{F}_2$ *là hai góc kề bù,* $\hat{E}_1, \hat{E}_2$ *là hai góc kề bù. Do "sin bù", nên* $\sin\hat{F}_1 = \sin\hat{F}_2$ *và* $\sin\hat{E}_1 = \sin\hat{E}_2$.

Nhờ đó, nếu sử dụng định lý hàm số sin trong các tam giác BHF, FGC, AHE, EGD và biến đổi đại số thì có được đẳng thức. Từ đó, tìm ra được $\sin\hat{H} = \sin\hat{G}$ có điều cần chứng minh.

Ngoài ra, qua đánh giá tổng kết, với bài thi vấn đáp cuối học phần, mà nội dung câu hỏi thường là "*Dựa vào bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G.Polya hướng dẫn học sinh tìm lời giải bài toán sau:...*", cho thấy về cơ bản người học đã hiểu và trả lời được câu hỏi này.

4. Thảo luận

Bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G. Polya đã được phổ biến ở nước ta, tuy nhiên, đến nay, còn có những cách hiểu và khai thác riêng, mà một số cách làm như được mô tả ở mục 1 của bài viết này. Còn theo chúng tôi bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G. Polya, mặc dù được mô tả theo các bước (4 bước) nhưng đó không phải là quy trình để có thể dẫn ngay đến lời giải của bài toán, mà đó chỉ là bản hướng dẫn về cách suy nghĩ, định hướng tư duy, để có thể phát hiện được mối liên hệ logic giữa cái đã cho và cái phải tìm. Đây là quá trình đòi hỏi người giải toán phải thực hiện được các thao tác tư duy, như phân tích, tổng hợp, so sánh, đặc biệt hoá, khái quát hoá,... chứ không đơn thuần chỉ là tìm ở đâu đó một lời giải đúng của bài toán.

Hơn nữa, hướng dẫn người học tìm lời giải bài toán, dựa theo bản gợi ý của G. Polya, là vấn đề không mới. Tuy nhiên, với đối tượng cụ thể, chẳng hạn, sinh viên Sư phạm Toán ở Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 vẫn là điều không cũ, cần được dạy kĩ càng, xem như rèn nghề dạy học cho sinh viên. Đặc biệt là trong bồi dưỡng giáo viên toán, sao cho họ hiểu để thay đổi cách dạy, tránh được tình trạng chỉ chú trọng chữa bài tập trên lớp, mà không dạy cách giải toán cho người học.

Nếu khéo léo khai thác và sử dụng, minh hoạ qua Ví dụ (như trình bày trên), chẳng những giúp người học về cách nghĩ để tìm ra lời giải bài toán mà còn tìm được những cách giải khác nhau với bài toán đề ra, rồi có thể dựa vào đó để sáng tác thêm bài toán mới, làm phong phú thêm vốn hiểu biết của mình. Nhờ đó, nhận ra vẻ đẹp của Toán học, tạo hứng thú, ham thích học tập môn Toán. Như thế, mỗi người học có thể tự tin hơn khi học và sáng tác bài tập. Thêm vào đó, hiểu sâu hơn các kiến thức được học và cách huy động các kiến thức này khi suy luận để tìm lời giải của bài toán.

5. Kết luận

Giải bài tập toán như một nghệ thuật có tính thực hành, như trượt tuyết hay chơi đàn, người học có thể học được nó nhờ chăm chỉ luyện tập. Các bước như đề cập trong bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G. Polya không phải là quy trình giải toán để có thể áp dụng, rập khuôn theo là có kết quả mà đó chỉ là hướng dẫn cách nghĩ, cách huy động các kiến thức đã biết để có thể tìm kiếm liên hệ logic, chắp nối giữa cái đã cho và cái phải tìm, nhờ đó tìm ra hướng giải bài toán này. Vì thế, chỉ khi người giải toán hiểu và luyện tập theo thì mới có thể chủ động, tự tin tìm lời giải bài toán, với những bài toán mới, chưa quen dạng.

Nếu người dạy khéo léo khai thác, hướng dẫn để người học có thể từng bước làm theo, tiến tới hiểu và có thể vận dụng bản gợi ý tìm lời giải bài toán của G.Polya thì chẳng những giúp tự tin khi học Toán mà còn thấy được vẻ đẹp của Toán học, nhờ đó, có thể ham thích học tập Toán khi học ở nhà trường. Vì điều kiện chưa cho phép nên chúng tôi chưa có dịp kiểm nghiệm cách làm này với đối tượng học sinh phổ thông.

Tài liệu tham khảo

A. Gray, C. (2018). *The Impact of Applying the First Two Steps of Polya's Four Problem-Solving Steps in an Advanced Mathematics Classroom*. (Doctoral dissertation). Retrieved from https://scholarcommons.sc.edu/etd/5037

Cao Thị Hà, Nguyễn Thị Ánh Tâm. (2024). Các bước để giải bài toán có bối cảnh thực trong dạy học Toán ở trường trung học phổ thông. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, tập 20, số S1. https://doi.org/10.15625/2615-8957/12420110

Đỗ Thị Trinh. (2017). Rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh phổ thông qua việc vận dụng phép biến hình. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, số 136, tháng 01, tr.63-66.

G. Polya. (2009). *Giải bài toán như thế nào* (Hồ Thuần - Bùi Tường dịch). NXB Giáo dục Việt Nam.

Lê Thị Hoà Bình. (2014). *Phát triển năng lực vận dụng quy trình bốn bước của G. Polya vào giải toán tọa độ trong không gian cho học sinh lớp 12*. Luận văn Thạc sĩ (Chuyên ngành Lí luận và phương pháp dạy học bộ môn Toán), Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

Nguyễn Bá Kim. (2011). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.

Phạm Thị Trà My. (2013). *Vận dụng bảng gợi ý của G. Polya hướng dẫn học sinh tìm lời giải bài toán về tọa độ trong mặt phẳng*. Luận văn Thạc sĩ Khoa học giáo dục, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

Phí Thị Thùy Vân. (2006). Vận dụng quy trình giải toán của G. Polya vào dạy học giải bài tập cho học sinh chuyên Toán. *Tạp chí Khoa học Giáo dục*, số 4, tháng 01, tr.36-38.

Theresa Ugonwa Okafor. (2019). *Effect of Polya's problem-solving technique on the academic achievement of senior secondary school students in Physics*. European J of Physics Education Volume 10 Issue 1 1309-7202. https://eric.ed.gov/?id=EJ1231053

 https://doi.org/10.15625/2615-8957/12610405