KHAI THÁC MỐI LIÊN HỆ BÊN TRONG GIỮA CÁC NỘI DUNG MÔN TOÁN NHẰM HỖ TRỢ HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG PHÁT HIỆN CÁCH GIẢI QUYẾT CÁC VẤN ĐỀ TOÁN HỌC

GS.TS. ĐÀO TAM - Trường Đại học Vinh

ThS. PHAN THANH HẢI - Trường THPT Trường Chinh - Đắk Nông

1. Đặt vấn đề

Khi tiếp cận khám phá các vấn đề Toán học, học sinh (HS) bộc lộ những khó khăn sau: Khó phát hiện những tri thức cội nguồn, những vấn đề gốc liên quan tới tình huống mới để biến đổi về dạng quen thuộc; HS thiếu phương pháp tìm hiểu vấn đề, các đối tượng, quan hệ ẩn chứa trong những tình huống mới. Nguyên nhân do việc chuẩn bị tư tưởng và kĩ thuật xác định, mở rộng mối liên hệ biện chứng giữa các tri thức đã có của môn Toán cho HS chưa sâu sắc. Từ đó, khả năng huy động kiến thức để giải quyết vấn đề Toán học thông qua các hoạt động biến đổi đối tượng và hoạt động liên tưởng tới các tri thức quen thuộc bị hạn chế. Trong bài viết này, chúng tôi nghiên cứu các mối liên hệ giữa kiến thức thuộc các chuyên mục khác nhau nhằm bồi dưỡng HS mở rộng khả năng huy động kiến thức trong việc tìm tòi cách thức giải quyết vấn đề Toán học.

2. Khai thác mối liên hệ bên trong giữa các nội dung môn Toán nhằm hỗ trợ HS trung học phổ thông phát hiện cách giải quyết các vấn đề Toán học

2.1. Liên hệ giữa một số nội dung về hệ thức lượng với hình học đồng dạng và hình học vectơ

2.1.1. Liên hệ giữa tích vô hướng và hệ thức lượng trong các hình

Giáo viên (GV) khai thác mối quan hệ giữa kiến thức về tích vô hướng và kiến thức về hệ thức lượng theo sơ đồ sau:

Tích vô hướng → Các hệ thức về lượng liên quan tới độ dài và góc

HS hiểu sơ đồ này thông qua khai thác tri thức đã có và hệ thống bài tập vận dụng do GV chọn lọc thiết kế để tạo tình huống cho HS hoạt động tìm tòi. Từ đó, HS lĩnh hội được cách thức huy động kiến thức để giải quyết vấn đề.

Cụ thể hóa vấn đề trên như sau:

$\overrightarrow{AB}^2 = AB.AB.Cos0^0 = AB^2$; Nếu hai vec tơ $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng có độ dài là $|\vec{u}| = a$, $|\vec{v}| = b$ thì tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v} = a.bCos0^0 = a.b$; Nếu hai vec tơ đơn vị $\vec{i},\vec{j}$ có góc giữa chúng bằng α thì $\vec{i}.\vec{j} = Cos\alpha$. Từ đó, kết luận sư phạm rút ra: "Nếu gặp các dạng toán về tính độ dài, các hệ thức liên quan đến tích độ dài, bình phương độ dài, độ lớn góc thì huy động kiến thức về tích vô hướng để giải dạng toán đó". Ý tưởng này được khắc sâu qua việc đề xuất các tình huống để HS luyện tập và nắm được cách thức huy động nhằm giải quyết vấn đề.

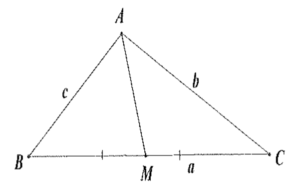
Ví dụ: GV yêu cầu HS nêu định hướng cách chứng minh công thức tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC theo độ dài ba cạnh a, b, c của tam giác đó:

$$AM^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$$

GV đặt câu hỏi cho HS: Hệ thức cần chứng minh liên quan tới bình phương độ dài, cần huy động tri thức gốc đã biết nào để làm sáng tỏ công thức trên?

Để trả lời câu hỏi trên, GV yêu cầu HS phải thực hiện các hoạt động:

Hoạt động 1: Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (Xem hình 1).



Hình 1

Hoạt động 2:

Tính $AM^2 = \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Từ đó, sử dụng công thức $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$ ta có:

$$AM^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$$

GV nhận xét để HS thấy được công thức này trong sách giáo khoa được chứng minh nhờ sử dụng định lí Cosin trong tam giác. Tuy nhiên, việc sử dụng này chưa nhấn mạnh được lí do của việc huy động kiến thức, chưa làm sáng tỏ vai trò của mối quan hệ nhân quả trong việc kết nối tri thức mới và tri thức đã có.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng đường phân giác góc trong l_a của góc A của tam giác ABC được tính theo các cạnh của tam giác ABC là: $l_a^2 = bc\left[\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}\right]$

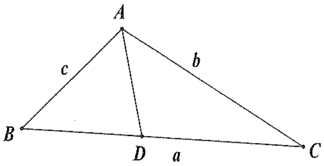
GV điều khiển HS giải quyết vấn đề thông qua hệ thống các câu hỏi và thực hiện các hoạt động chủ yếu sau:

Ta cần huy động những kiến thức chủ yếu nào? Trả lời câu hỏi này để HS biết cách huy động kiến thức về tích vô hướng vì công thức cần chứng minh liên quan tới tích các độ dài và bình phương các độ dài.

HS thực hiện các hoạt động chủ yếu sau:

Hoạt động 1: Biểu diễn $\overrightarrow{AD}$ có các đầu mút là đỉnh A và chân đường phân giác vẽ từ A qua các $\overrightarrow{AB}$ và

$\overrightarrow{AC}$ (Xem hình 2). Để thực hiện hoạt động này, HS sử dụng tính chất của đường phân giác và thực hiện các biến đổi sau:



Hình 2

$$\frac{DB}{DC}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow\frac{DB}{DB+DC}=\frac{c}{b+c}\Leftrightarrow\frac{DB}{BC}=\frac{c}{b+c}$$

Hay $\overrightarrow{BD}=\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}$

Từ đó

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}=$$

$$\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\left(1-\frac{c}{b+c}\right)\overrightarrow{AB}-\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

Hay $\overrightarrow{AD}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}-\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$

Hoạt động 2: Tính bình phương vô hướng của vec tơ $\overrightarrow{AD}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$ và sử dụng công thức:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$ ta được

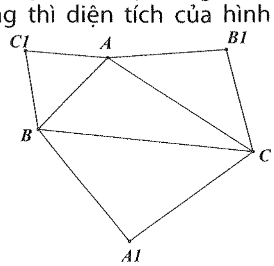
$$AD^2=l_a^2=bc\left[\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}\right]$$

2.1.2. Liên hệ giữa kiến thức về đồng dạng và hệ thức lượng trong các hình

Khai thác mối liên hệ nhân quả và liên hệ phụ thuộc giữa kiến thức về đồng dạng theo sơ đồ sau:

Hình học đồng dạng → Định lí Pythago → Định lí Cosin trong tam giác → Định lí Sin trong tam giác → Các hệ thức về lượng khác

Định lí Pythago phát biểu tương đương theo dạng: Nếu ta dựng các hình vuông có cạnh lần lượt bằng cạnh huyền và các cạnh góc vuông thì diện tích của hình vuông dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông.

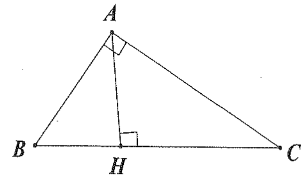


Hình 3

Do hai hình vuông bất kì là đồng dạng nên mệnh đề vừa nêu trên có thể phát biểu ở dạng tổng quát: Nếu trên cạnh huyền và các cạnh góc vuông ta dựng các tam giác đồng dạng thì tổng diện tích của tam giác dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích các tam giác dựng trên hai cạnh góc vuông (Xem hình 3).

GV có thể hướng dẫn HS kiểm nghiệm sử dụng mệnh đề trên để chứng minh định lí Pythago nhờ sử dụng tam giác đồng dạng.

Nêu vắn tắt chứng minh đó như sau: Giả sử tam giác ABC vuông tại A, vẽ đường cao AH, khi đó ba tam giác ABC, HBA và HAC đôi một đồng dạng. Vì mỗi cặp các tam giác đó có các góc nhọn tương ứng bằng nhau. Các tam giác nói trên thực chất là ba tam giác vuông đồng dạng lần lượt nhận BC, AB, AC tương ứng làm cạnh huyền và hiển nhiên diện tích tam giác ABC bằng tổng diện tích các tam giác HBA và HAC (Xem hình 4).



Hình 4

Do tam giác

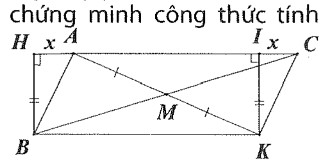
$$\triangle ABC\sim\triangle HBA\Rightarrow\frac{AB}{HB}=\frac{BC}{AB}\Leftrightarrow AB^2=HB.BC \quad (3)$$

Tương tự do $\triangle ABC\sim\triangle HAC\Rightarrow AC^2=HC.BC$ (4)

Từ (3) và (4) cộng theo vế ta có: $a^2=b^2+c^2$

Từ định lí Pythago, ta có thể tạo ra các tam giác vuông để chứng minh định lí Cosin và định lí Sin trong tam giác. Các định lí trên là cơ sở nền tảng xây dựng hệ thức lượng trong các hình. Dưới đây, chúng ta xét một số ví dụ nhằm rèn luyện cho HS các hoạt động kết nối tri thức, huy động kiến thức để giải quyết vấn đề.

Ví dụ 3: Ta xét cách chứng minh công thức tính đường trung tuyến nhờ huy động kiến thức về đồng dạng và kiến thức dẫn xuất suy ra từ đồng dạng (Định lí Pythago). Nhờ xem đường trung tuyến AM của tam giác ABC là một nửa đường chéo AK của hình bình hành ABKC. Hình bình hành có được nhờ lấy đối xứng K của A qua phép đối xứng tâm M (Xem hình 5).



Hình 5

Dựng KI và BH lần lượt là hai đường cao của hình bình hành. Khi đó, ta có hai tam giác ABH và CKI là hai tam giác bằng nhau theo dấu hiệu cạnh – góc – cạnh.

Đặt AH = IC = x

Việc tính đường trung tuyến AM của tam giác ABC chuyển về tính đường chéo của hình bình hành ABKC.

Ta có: $AK^2=(2AM)^2=4AM^2$

Áp dụng định lí Pythago cho tam giác vuông AKI và BHC, ta có:

$$AK^2=4AM^2=(a-x)^2+h^2=a^2+x^2+h^2-2ax \quad (5)$$

$$BC^2=a^2=(b+x)^2+h^2=b^2+x^2+h^2+2bx \quad (6)$$

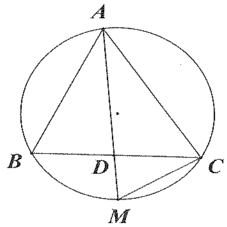
Từ (5) và (6) cộng vế theo vế suy ra kết quả: $AM^2=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)$

Ví dụ 3: Chứng minh công thức tính độ dài đường phân giác trong của góc A: $l_a^2=\frac{bc\left[(b+c)^2-a^2\right]}{(b+c)^2}$

Chứng minh công thức trên nhờ việc huy động kiến thức hình học đồng dạng theo quan hệ nhân quả đã nêu.

Từ hệ thức $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{c}{b}$ nhờ biến đổi tỉ lệ thức ta có:

$BD=\dfrac{ac}{b+c}$ (7) và $DC=\dfrac{ab}{b+c}$ (8)



Hình 6

Gọi D là chân đường phân giác hạ từ đỉnh A của tam giác ABC và (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó AD giao với đường tròn (C) tại M.

Ta có $\triangle ABD \sim \triangle AMC$ và $\triangle ABD \sim \triangle CMD$

Từ đó suy ra $AD^2 = AB.AC - DB.DC$ (9)

Thay (7), (8) vào (9) ta được: $l_a^{\,2}=\dfrac{bc\left[(b+c)^2-a^2\right]}{(b+c)^2}$

2.2 Mối liên hệ giữa tứ diện và hình hộp

2.2.1. Xây dựng khái niệm hình hộp từ hình tứ diện

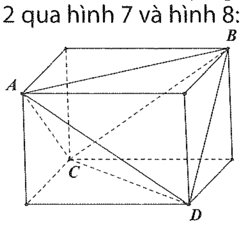
Cho tứ diện ABCD, ta xây dựng khái niệm hình hộp bằng hai cách sau đây:

Cách 1: Qua các cặp cạnh đối diện của tứ diện, ta dựng các cặp mặt phẳng song song lần lượt chứa hai cạnh đối diện đó. Khi đó ba cặp mặt phẳng song song nói trên đôi một cắt nhau tạo thành một hình hộp. Hình hộp vừa xây dựng ở trên gọi là hình hộp ngoại tiếp tứ diện (theo kiểu 1).

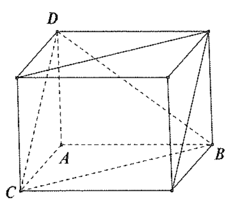
Cách 2: Qua các đỉnh B, C, D của tứ diện ABCD dựng các mặt phẳng lần lượt song song với các mặt phẳng chứa các mặt đối diện với các đỉnh B, C, D của tứ diện ABCD. Các cặp mặt phẳng này đôi một cắt nhau tạo thành một hình hộp; hình hộp này gọi là hình hộp ngoại tiếp tứ diện ABCD (theo kiểu 2).

Sự tồn tại các hình hộp này có thể kiểm tra nhờ các mệnh đề cơ bản: Nếu hai mặt phẳng song song bị cắt bởi mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến nhận được là hai đường thẳng song song; Tồn tại duy nhất hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng chéo nhau và song song với nhau.

Mô tả các hình hộp ngoại tiếp tứ diện theo kiểu 1 và kiểu 2 qua hình 7 và hình 8:



Hình 7



Hình 8

Tùy thuộc vào các dạng tứ diện khác nhau chúng ta thu được các loại hình hộp khác nhau. Dưới đây, ta xét một vài trường hợp cụ thể:

- Nếu tứ diện ABCD là tứ diện vuông, có góc tam diện đỉnh A là góc tam diện vuông, các cạnh AB, AC, AD lần lượt bằng a, b, c thì hình hộp ngoại tiếp tứ diện theo kiểu 2 là hình hộp chữ nhật có các kích thước là a, b, c.

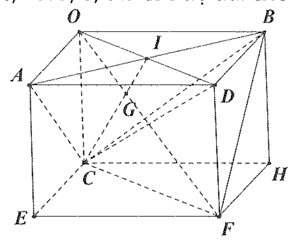
- Nếu tứ diện ABCD là tứ diện gần đều có các cạnh AB=CD; AC=BD; AD=BC thì hình hộp ngoại tiếp tứ diện theo kiểu 1 là hình hộp chữ nhật; đặc biệt nếu ABCD là tứ diện đều thì hình hộp ngoại tiếp tứ diện theo kiểu 1 là hình lập phương.

- Nếu tứ diện ABCD là tứ diện có cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì hình hộp ngoại tiếp tứ diện theo kiểu 1 là hình hộp có tất cả các mặt là hình thoi.

Dưới đây, chúng tôi xét một số dạng ứng dụng của các mối liên hệ giữa tứ diện và hình hộp đã xét ở trên.

Dạng 1: Đơn giản hóa việc giải quyết vấn đề cồng kềnh trên mô hình của hình tứ diện nhờ việc chuyển sang mô hình hình hộp thông qua hoạt động liên tưởng

Ví dụ 4: Cho tứ diện OABC có góc đỉnh O là góc tam diện vuông (các cạnh OA, OB, OC, đôi một vuông góc với nhau). Đặt OA=a; OB=b; OC=c, với a; b; c là các độ dài cho trước. Hãy tính khoảng cách từ đỉnh O đến trọng tâm của tam giác ABC theo a; b; c.



Hình 9

Nếu thực hiện việc tính độ dài đoạn thẳng OG (G là trọng tâm tam giác ABC) trên mô hình của hình tứ diện thì khá cồng kềnh.

Để khắc phục sự cồng kềnh trên, ta dựng hình hộp OADB.CEFH ngoại tiếp tứ diện OABC (theo kiểu 2). Khi nghiên cứu hình hộp HS đã biết kết quả sau:

- Đường chéo OF đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và $OG=\dfrac{1}{3}OF$

- Các đường chéo của hình hộp bằng nhau và tính theo ba kích thước: OA=a; OB=b; OC=c là: $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

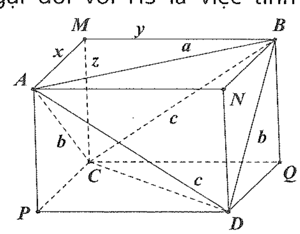
Từ đó, HS có thể biết ngay kết quả

$$OG=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Dạng 2: Khắc phục khó khăn chướng ngại do HS thiếu tri thức phương pháp khi giải quyết vấn đề trong các tình huống tri thức mới

Ví dụ 5: Cho tứ diện ABCD có AB=CD=a; AC=BD=b; AD=BC=c. Hãy tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng BCD.

Khó khăn, chướng ngại đối với HS là việc tính khoảng cách AH, H là chân đường vuông góc hạ từ A tới mặt phẳng BCD. HS không biết được tính chất của điểm H. Điểm H không thuộc các điểm đặc biệt mà HS đã biết như trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp,...



Hình 10

HS chưa thể sử dụng phương pháp vec tơ và tọa độ để xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng BCD, không biết chọn hệ trục tọa độ nào để lập phương trình mặt phẳng BCD và tính tọa độ điểm A.

Khắc phục khó khăn bằng cách dựng hình hộp MANB.CPDQ ngoại tiếp tứ diện ABCD (theo kiểu 1).

Từ công thức tính thể tích tứ diện, suy ra:

(Xem tiếp trang 11)