RÈN LUYỆN HOẠT ĐỘNG PHÁN ĐOÁN CHO HỌC SINH THÔNG QUA VIỆC SỬ DỤNG SUY LUẬN QUY NẠP TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC 10

ThS. VŨ ĐÌNH CHINH
Trường Trung cấp Sư phạm Mẫu giáo - Nhà trẻ Hà Nội

1. Đặt vấn đề

Rất nhiều nhà nghiên cứu cho rằng giải quyết bài toán và phán đoán bài toán là hai hoạt động quan trọng của toán học. Polia (năm 1954) đã đưa ra ví dụ về phân tích quá trình phán đoán thông qua vai trò đặc biệt hóa và tổng quát hóa trong các hoạt động toán học. Trong dạy học toán, vai trò của phán đoán chiếm vị trí khá quan trọng. Ngày nay, dạy học toán khuyến khích tính tích cực của học sinh (HS) trong các tình huống toán học.

Nhiều nhà khoa học đã có nhiều đóng góp có ý nghĩa trong các công trình nghiên cứu về phán đoán, trong đó phải kể đến Fischbein (1987) đã xem xét phán đoán như là sự biểu diễn của tri giác. Còn Mason (2002) đã chứng tỏ được tầm quan trọng của "môi trường phán đoán". Một số công trình nghiên cứu phán đoán được tiến hành thông qua "môi trường hình học động" (Arzarello (1998), Furinghetti và Paola (2003)). Tác giả Bergqvist (2005) đã công bố công trình nghiên cứu về phân tích làm thế nào để xác minh phán đoán và làm thế nào để giáo viên tin rằng nó có liên hệ đến quy trình thực hiện. Hầu hết các nghiên cứu đều chưa làm rõ nội dung phán đoán được đề nghị liên hệ với các tình huống phổ biến trong dạy học toán: Giải quyết vấn đề. Như vậy, phán đoán và giải quyết vấn đề là hai hoạt động có liên quan mật thiết với nhau. Tuy nhiên, không phải hầu hết các vấn đề đều dẫn đến phán đoán và các bài toán khác nhau thì dẫn đến các loại phán đoán khác nhau [1, tr. 55-56].

2. Phán đoán

Theo Logic học đại cương của tác giả Nguyễn Như Hải biên soạn: "Phán đoán là hình thức logic của tư duy, trong đó các khái niệm được liên kết với nhau để khẳng định hay phủ định một dấu hiệu nào đó của đối tượng". Như vậy, chức năng cơ bản của phán đoán là liên kết các khái niệm lại với nhau. Sự liên kết đó không chỉ đơn thuần phản ánh mối quan hệ biện chứng giữa các yếu tố cấu thành của tư duy mà còn xác định một đặc tính nào đó thuộc về hay không thuộc về đối tượng, đồng thời dự đoán những khả năng xảy ra một quan hệ nào đó. Chính vì thế, phán đoán vừa có chức năng nhận thức, nhận định lại vừa có chức năng dự báo.

3. Suy luận quy nạp

Theo quan điểm của Logic học: "Suy luận quy nạp là suy luận trong đó kết luận là tri thức chung hơn, có tính khái quát hơn được rút ra từ sự liên kết những tri thức ít chung hơn, có tính cụ thể hơn". Cơ sở khách quan của suy luận quy nạp chính là sự chuyển hóa biện chứng giữa cái chung và cái riêng. Trong tự nhiên và xã hội, cái chung không tồn tại biệt lập, bên ngoài cái riêng. Cái riêng tồn tại trong mối liên hệ với cái chung. Cái chung tồn tại trong cái riêng, thông qua cái riêng mà thể hiện ra. Có nghĩa là, cái chung chỉ bộc lộ ra trong các sự vật cụ thể. Do đó, để rút ra cái chung, có tính quy luật, con người cần phải nghiên cứu các sự vật cụ thể, tức là nghiên cứu cái riêng. Chính vì vậy, quá trình nhận thức diễn ra trong suy luận quy nạp đi từ cái cụ thể qua cái riêng rồi tới cái chung.

Suy luận quy nạp là suy luận từ những chân lí riêng lẻ, cụ thể khái quát lên thành những chân lí tổng quát. Kiểu quy nạp như vậy có thể dẫn đến các kết luận sai vì vậy không cho phép dùng quy nạp để chứng minh. Quy nạp có thể dùng để phát hiện vấn đề, phán đoán ra chân lí, sau đó dùng suy diễn để chứng minh.

Như vậy, bản thân suy luận quy nạp không được dùng để chứng minh các mệnh đề toán học mà sử dụng suy luận này như để phán đoán, tìm kiếm tri thức mới (tri thức khái quát) từ việc khảo sát những trường hợp riêng, cụ thể.

Những điều kiện của suy luận quy nạp đúng đắn:

Thứ nhất: Các sự vật cụ thể để thực hiện sự khái quát hóa nhằm đưa đến cái chung phải là sự vật cùng loại. Bởi vì chỉ có những sự vật cùng loại mới chứa đựng những cái giống nhau, giúp cho nhận thức tìm ra cái chung trong sự khác biệt.

Thứ hai: Việc khái quát phải dựa trên những dấu hiệu bản chất của sự vật. Bởi vì chỉ có cái bản chất mới làm nên quy luật chung của sự tồn tại và phát triển của sự vật và hiện tượng.

Thứ ba: Phải khảo sát số lượng lớn các đối tượng đủ để rút ra kết luận chung cho lớp đối tượng nghiên cứu [2, tr.131 -132].

4. Quy trình phán đoán nhờ suy luận quy nạp

Chúng tôi đề xuất quy trình rèn luyện HS năng lực phán đoán thông qua quá trình quy nạp từ một số ít các trường hợp riêng rẽ.

Bước 1: Quan sát các trường hợp riêng: Khi quan sát các trường hợp riêng, đây là những trường hợp cụ thể của vấn đề đặt ra. Giai đoạn quan sát những trường hợp cụ thể có thể chỉ được hạn chế một số trường hợp. Từ đó, HS dự đoán kết quả của một số trường hợp riêng khác mà các em nghĩ là đúng theo một mối liên hệ nào đó; có thể các em dựa vào các con số, hình vẽ,...

Bước 2: Kiểm chứng kết quả vừa dự đoán ở một số trường hợp riêng: Bằng nhiều cách khác nhau, chẳng hạn vẽ thêm đường phụ,... để chuyển về bài toán quen thuộc đã biết, sau đó sử dụng suy luận chứng minh đi tìm kết quả đúng cho các trường hợp riêng khác.

Bước 3: Sắp xếp các trường hợp riêng một cách có hệ thống: Sắp xếp các trường hợp riêng có liên quan với nhau và hệ thống hóa chúng.

Bước 4: Tìm kiếm và phát hiện quy luật chung từ các trường hợp riêng: Khi quan sát mà thấy tình huống được lặp đi lặp lại và thường xuyên một cách tự nhiên thì quy luật đó có thể áp dụng cho các trường hợp tiếp theo. Lưu ý, phán đoán này có thể áp dụng cho mọi trường hợp.

Bước 5: Hình thành phán đoán: Người học đưa ra phán đoán áp dụng cho tất cả các trường hợp dựa trên một số trường hợp riêng đã được khảo sát trước đó nhưng vẫn có sự nghi ngờ liệu phán đoán đó có hợp lí không. Một phán đoán chỉ là phát biểu chưa được xác nhận, chưa khẳng định chắc chắn đúng hoặc sai thì chỉ là một phỏng đoán.

Bước 6: Khái quát hóa phán đoán: Duval (1990) gọi là "giá trị nhận thức luận", từ những phán đoán có thể xảy ra dẫn đến quy tắc chung được chấp nhận. Nếu ta tin rằng giả thuyết đó là đúng thì chúng ta có thể tổng quát hóa giả thuyết đó để đi đến chân lí. Nếu không tin thì nó chỉ là một phán đoán. Tìm thêm các ví dụ là không đủ để khẳng định cho trường hợp tổng quát.

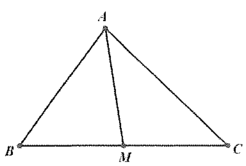
Bước 7: Chứng minh trong trường hợp tổng quát: Chứng minh giả thuyết tổng quát liên quan đến việc đưa ra lí do giải thích giả thuyết, có lẽ với ý định thuyết phục người khác tin rằng trường hợp tổng quát là hợp lí. Một trong những cách biện minh đảm bảo tính đúng đắn của phán đoán là chứng minh toán học.

Ví dụ minh họa

"Cho tam giác *ABC*, nếu *M* chia đoạn *BC* theo tỉ số *k*, $\overrightarrow{BM}=k.\overrightarrow{BC}$ $(0<k<1)$. Hãy dự đoán công thức *AM* theo 3 cạnh của tam giác".

Tình huống này đưa ra không phải HS nào cũng hào hứng để các em đi dự đoán công thức, lí do các em thấy mình chưa có cơ sở để đi dự đoán. Sau đây là một quy trình phán đoán giúp HS phán đoán tốt hơn, đồng thời qua đó thúc đẩy việc đi tìm lời giải cho bài toán này nhằm kiểm chứng phán đoán của các em.

Bước 1: Quan sát trường hợp riêng (lựa chọn các trường hợp riêng điển hình)



Hình 1

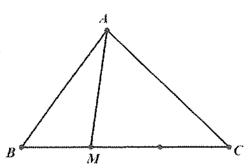
+ Xuất phát từ công thức quen thuộc trong sách giáo khoa Hình học 10: "M là trung điểm của cạnh *BC* thì công thức tính trung tuyến AM là

$AM^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2(*)$". (Hình 1)

+ Khảo sát một số trường hợp riêng khác bằng cách thay đổi giả thuyết:

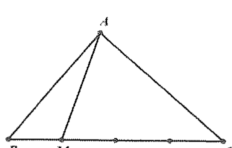
Đặt vấn đề:

Bài toán 1: Nếu *M* thuộc cạnh *BC* sao cho $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (Hình 2)



Hình 2

Bài toán 2: "Nếu *M* thuộc cạnh *BC* sao cho $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ (Hình 3)



Hình 3

Em hãy phán đoán công thức tính *AM* theo 3 cạnh của tam giác và sử dụng suy luận toán học để chứng minh công thức vừa phán đoán.

Qua khảo sát thực nghiệm, khi chưa kiểm chứng công thức, có những xu hướng phán đoán của HS đã xảy ra trong các buổi thực nghiệm như sau:

Xu hướng 1:

Phán đoán $AM^2=\frac{1}{3}AB^2+\frac{1}{3}AC^2-\frac{1}{9}BC^2$ được suy luận tương tự từ công thức $AM^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2$

Phán đoán này được nhiều em HS ở các lớp khảo sát lựa chọn.

Xu hướng 2:

Phán đoán $AM^2=\frac{2}{3}AB^2+\frac{1}{3}AC^2-\frac{2}{9}BC^2$ hoặc $AM^2=\frac{1}{3}AB^2+\frac{2}{3}AC^2-\frac{2}{9}BC^2$ được suy luận từ việc các em quan sát công thức $AM^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2$ ta có $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1;\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ nên với trường hợp này $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1;\ \frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$. Những em suy nghĩ theo xu hướng này gặp một vấn đề là các em chưa xác định được hệ số 2/3 ở vị trí AB^2 hay AC^2.

Xu hướng 3: $AM^2=\frac{2}{3}AB^2+\frac{1}{3}AC^2-\frac{2}{9}BC^2$. Các em phán đoán được điều này vì cho rằng đã dựa vào công thức $AM^2=\frac{\overline{CM}}{\overline{CB}}AB^2+\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}AC^2-\frac{\overline{CM}}{\overline{CB}}.\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}BC^2$ được suy ra từ công thức (*).

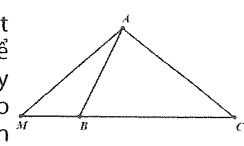
Ngoài ra, các em còn khảo sát một số trường hợp riêng khác như:

M nằm trên ngoài đoạn BC sao cho $\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Tương tự lập luận trên, HS tìm được công thức:

$AM^2=\frac{3}{2}AB^2-\frac{1}{2}AC^2+\frac{3}{4}BC^2$ (Hình 4)

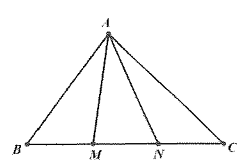
Câu hỏi đặt ra là khảo sát bao nhiêu trường hợp riêng để các em có thể dự đoán được quy luật của bài toán quy nạp. Theo khảo sát thực tế, các em chỉ cần khảo sát từ hai đến ba trường hợp riêng là có thể dự đoán được quy luật cho trường hợp tổng quát.



Hình 4

Bước 2: HS kiểm chứng phán đoán các trường hợp riêng đúng hay sai

Bài toán 1: Gọi N là trung điểm của MC. Áp dụng công thức (*) hai lần cho hai tam giác (Hình 5):



Hình 5

+ Tam giác ABN:

$$AM^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AN^2-\frac{1}{4}BN^2$$

$$=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AN^2-\frac{1}{9}BC^2\ (1)$$

+ Tam giác AMC:

$$AN^2 = \frac{1}{2}AM^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}MC^2$$

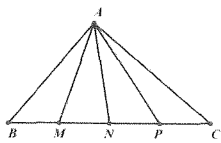
$$= \frac{1}{2}AM^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{9}BC^2 \ (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$AM^2 = \frac{2}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{2}{9}BC^2$$

Bài toán 2: Tương tự với cách làm ở trên, Gọi N, P chia đoạn BC như hình vẽ bên cạnh. Áp dụng công thức (*) ba lần cho ba tam giác (Hình 6): ABN, AMP và ANC ta có:

$$AM^2 = \frac{3}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 - \frac{3}{16}BC^2$$



Hình 6

Bước 3: Sắp xếp các trường hợp riêng một cách có hệ thống

Các trường hợp riêng	Công thức tính AM theo 3 cạnh của tam giác	Nhận xét
M là trung điểm của BC	$AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$ $\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4};$
M thuộc BC sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$	$AM^2 = \frac{2}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{2}{9}BC^2$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1;$ $\frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{2}{9};$
M thuộc BC sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$	$AM^2 = \frac{3}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 - \frac{3}{16}BC^2$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1;$ $\frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{3}{16};$

Bước 4: Tìm kiếm và phán đoán quy luật chung

Khi nghiên cứu những số liệu trên, các em thấy được rằng khi xét các trường hợp riêng đều tuân theo quy luật: "Tổng hệ số của của AB^2 và AC^2 bằng 1 và tích các hệ số của AB^2 và AC^2 bằng hệ số của BC^2".

Bước 5: Khái quát hóa phán đoán

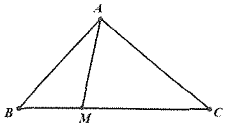
Cho tam giác ABC, nếu M chia đoạn BC theo tỉ số $\overrightarrow{BM} = k.\overrightarrow{BC}$ $(0<k<1)$ thì

$$AM^2 = (1-k).AB^2 + k.AC^2 - (k-k^2)BC^2$$

Bước 6: Chứng minh trong trường hợp tổng quát

Cho tam giác *ABC*, nếu *M* chia đoạn *BC* theo tỉ số *k*, $\overrightarrow{BM} = k.\overrightarrow{BC}$ $(0<k<1)$. Tính *AM* theo 3 cạnh của tam giác (Hình 7).

Ta có:



Hình 7

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + k.\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + k.\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = (1-k)\overrightarrow{AB} + k.\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}^2 = AM^2 = (1-k)^2AB^2 + k^2AC^2 + 2(1-k)k.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \ (3)$$

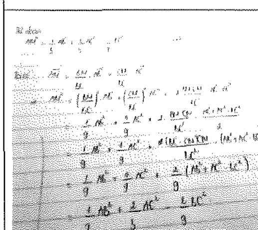
trong đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$

thay vào (3) ta có: $AM^2 = (1-k)AB^2 + k.AC^2 - (k-k^2).BC^2$

4. Thực nghiệm vấn đề nghiên cứu

Chúng tôi thực nghiệm vấn đề nghiên cứu tại lớp 10 chuyên Toán của Trường Trung học phổ thông Nguyễn Huệ. Chúng tôi chia lớp thành 10 nhóm, mỗi nhóm có 3 HS. Các em cùng nhau hợp tác để dự đoán và giải quyết vấn đề đã đặt ra. Sau đây là một số nhóm của lớp 10 chuyên Toán đã tham gia khảo sát.

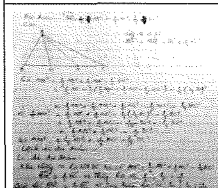
Nhóm 1

Bài làm của HS	**Phân tích quá trình phán đoán**
	Phán đoán của HS ở đây đóng vai trò kết luận của bài toán. HS dựa vào trực giác công thức của mình để đưa ra phán đoán cho kết quả bài toán mới. Các em lập luận rằng do việc quan sát các hệ số của công thức: $AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$ với $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ nên các em đưa ra phán đoán cho bài toán mới trong trường hợp $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ nên: $AM^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{1}{9}BC^2$

Ở nhóm này, các em chứng minh công thức để kiểm chứng kết quả vừa dự đoán. Chứng minh của các em dẫn đến công thức: $AM^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{2}{3}AC^2 - \frac{1}{9}BC^2$.

Việc tìm ra công thức khác với công thức dự đoán ban đầu của nhóm 1 khiến các em nhận định rằng đã dự đoán kết quả của bài toán là sai. Các em thừa nhận việc dự đoán của mình mang tính cảm tính vì các em không dựa trên cơ sở kiến thức chắc chắn nào cả. Tuy nhiên, việc dự đoán trước khi chứng minh lại đóng vai trò thúc đẩy việc đi tìm lời giải cho bài toán để đối chiếu kết quả vừa dự đoán.

Nhóm 2

Bài làm của HS	**Phân tích quá trình phán đoán**
	Cũng tương tự như nhóm 1, các em cũng lập luận rằng: Khi thấy M là trung điểm của BC ta có: $AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$ ta thấy các hệ số $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}$. Với trường hợp $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ thì suy

(Xem tiếp trang 48)