MỘT SỐ ĐỊNH HƯỚNG PHÁT TRIỂN TƯ DUY THUẬT GIẢI CHO HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUA DẠY HỌC CHỦ ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

TS. ĐỖ THỊ TRINH - VIÊN THỊ LIỄU

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Giải phương trình lượng giác là vấn đề tương đối mới mẻ và khó với đa số học sinh (HS) phổ thông khi mới tiếp cận cả về tư duy và cách tìm ra lời giải của bài toán. Nội dung phương trình lượng giác với nhiều biến đổi, nhiều dạng toán, nhiều quy trình vận dụng kĩ năng tính toán, nhiều bài toán có tiềm năng có thể chuyển về một thuật giải. Đó là điều kiện thuận lợi nhằm phát triển tư duy thuật giải (TDTG) cho HS phổ thông.

1. Tư duy thuật giải

TDTG là một loại hình thức tư duy toán học. Nó là phương thức tư duy biểu thị khả năng tiến hành các hoạt động sau:

T1: Thực hiện những thao tác theo một trình tự xác định phù hợp với một thuật giải.

T2: Phân tích một quá trình thành những thao tác được thực hiện theo trình tự xác định.

T3: Khái quát hóa một quá trình diễn ra trên một số đối tượng riêng lẻ thành một quá trình diễn ra trên một lớp đối tượng.

T4: Mô tả chính xác quá trình tiến hành một hoạt động.

T5: Phát hiện thuật giải tối ưu để giải quyết bài toán.

Trong đó, (T1) thể hiện năng lực thực hiện thuật giải, (T2 - T5) thể hiện năng lực xây dựng thuật giải. [1, tr.383]

2. Một số định hướng phát triển TDTG cho HS THPT thông qua dạy học chủ đề Phương trình lượng giác

a. Định hướng 1: Thực hiện những thao tác theo một trình tự xác định phù hợp với một thuật giải

Để phát triển khả năng tư duy này, sau khi hướng dẫn HS tìm ra một thuật giải để giải một dạng toán nào đó, giáo viên (GV) yêu cầu HS thực hiện những bài tập tương tự để củng cố quy trình thuật giải vừa học.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \dfrac{1}{4}$ b) $2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})-1=0$

Sau khi dạy xong quy tắc giải phương trình $\sin x = m$, GV có thể cho HS nêu các bước giải phương trình trên, sau đó có thể dùng một phần bảng trình bày quy tắc giải phương trình $\sin x = m$, phần bảng còn lại trình bày lời giải phù hợp với từng bước trong quy tắc.

Quy tắc	Lời giải
Giải phương trình $\sin x = m$. Bước 1: Kiểm tra + Nếu m > 1 hoặc m < -1 phương trình vô nghiệm chuyển sang bước 3. + Nếu -1≤m≤1 chuyển sang bước 2. Bước 2: Giải phương trình Đặt m = sinα, ta được: $\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=\pi-\alpha+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ Bước 3: Kết luận.	a) $\sin x = \dfrac{1}{4}$. Ta có : $\dfrac{1}{4}<1$. Đặt : $\dfrac{1}{4}=\sin\alpha$, khi đó : $\sin x=\sin\alpha$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=\pi-\alpha+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ Vậy phương trình có hai họ nghiệm. b) $2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})-1=0 \Leftrightarrow \sin(2x+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$ Ta có: $\dfrac{1}{2}<1$. Vì $\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$; $\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$ Nên $\Leftrightarrow \sin(2x+\dfrac{\pi}{6})=\sin\dfrac{\pi}{6}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Tiến hành nhất quán như vậy sẽ hình thành ở HS quy tắc giải phương trình $\sin x = m$, đồng thời phát triển ở các em năng lực thực hiện thuật giải.

b. Định hướng 2: Phân tích một quá trình thành những thao tác được thực hiện theo trình tự xác định

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số:

$P = x-2y+5$ biết x, y thỏa mãn $36x^2+16y^2=9$.

Với bài toán này, HS phải nắm được sơ lược khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số và cách tìm điều kiện để phương trình bậc nhất đối với sinx, cosx có nghiệm. GV cần lưu ý cho HS rằng nếu gặp biểu thức dạng: $x^2 + y^2 = 1$ thì liên tưởng đến việc đặt $x = \sin t$, $y = \cos t$.

Từ sự phân tích trên, GV có thể hướng dẫn HS hình thành thuật giải bài toán trên theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi: $36x^2 + 16y^2 = 9$ về dạng $x^2 + y^2 = 1$

Ta có: $36x^2 + 16y^2 = 9 \Leftrightarrow 4x^2 + \frac{16}{9}y^2 = 1$

Bước 2: Đặt $2x = \sin t$, $\frac{4}{3}y = \cos t$ sau đó thực hiện phép biến đổi đưa biểu thức P về dạng $a\sin t + b\cos t = c$.

Bước 3: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2 + b^2 \ge c^2$

Bước 4: Đưa ra bất đẳng thức: $m \le p \le M$. Từ đó kết luận MaxP, MinP.

Trong ví dụ này, GV cần hướng dẫn HS phân tích tìm ra một dãy các thao tác thực hiện theo một trình tự xác định để đáp ứng được yêu cầu bài toán.

c. Định hướng 3: Khái quát hóa quá trình diễn ra trên một số đối tượng riêng lẻ thành một quá trình diễn ra trên một lớp đối tượng

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 x + (1-\sqrt{3})\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

b) $3\sin^2 x + 4\sin 2x - (8\sqrt{3}-3)\cos^2 x = 3$

Để giải phương trình

$\sin^2 x + (1-\sqrt{3})\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$; GV có thể đưa ra các câu hỏi:

Kiểm tra với $\cos x = 0$. Có là nghiệm của phương trình ?

Xét với $\cos x = 0$ (tức $\sin^2 x = 1$) khi đó phương trình trở thành: $1 = 0$ nên $\cos x = 0$ không thỏa mãn.

Với $\cos x \neq 0$. Hãy chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$?

Ta được: $\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$

Đặt $t = \tan x$ phương trình có dạng:

$t^2 + (1-\sqrt{3})t - \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

GV yêu cầu HS thực hiện tương tự với phương trình còn lại, đó là:

b) $3\sin^2 x + 4\sin 2x - (8\sqrt{3}-3)\cos^2 x = 3$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 x + 8\sin x\cos x - (8\sqrt{3}-3)\cos^2 x = 3$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin^2 x = 1$) khi đó phương trình trở thành: $3 = 3$ nên $\cos x = 0$ thỏa mãn. Tức $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là một họ nghiệm của phương trình.

+ Với $\cos x \neq 0$ .Chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$?

Ta được:

$3\tan^2 x + 8\tan x - (8\sqrt{3}-3) = 3(1-\tan^2 x)$

$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Từ đó GV có thể hướng dẫn HS đưa ra thuật giải cho phương trình dạng: $a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d$ (1)

Bước 1: Kiểm tra :Với $\cos x = 0$ có là nghiệm của phương trình (1)?

Bước 2: Với $\cos x \neq 0$

Chia cả hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$. Ta được:

$a\tan^2 x + b\tan x + c = d(1+\tan^2 x)$

Đặt $t = \tan x$ phương trình có dạng:

$(a-d)t^2 + bt + c - d = 0$ (2)

Bước 3: Giải phương trình (2) và kết luận.

d. Định hướng 4: Mô tả chính xác quá trình tiến hành một hoạt động

Ví dụ 4: Giải phương trình sau:

$4\sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x - \sin x - \cos^3 x = 0$

GV đặt vấn đề đối với HS như sau:

Đối với dạng phương trình:

$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d$ thì HS đã có thuật giải rõ ràng.

Nhưng nếu gặp dạng:

$a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0$ thì phải thực hiện cách giải thế nào?

Trên cơ sở cách giải của phương trình thuần bậc hai với sin và cos , GV hướng dẫn HS mô tả cách giải tương tự cho phương trình dạng trên, bằng việc nhận dạng về hình thức của phương trình này, ta thấy đây là phương trình thuần bậc ba với sin và cos. Nên GV có thể hướng dẫn HS đưa ra thuật giải tương tự cho dạng phương trình:

$a\sin^3 x + b\sin^2 x.\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0$ (1') như sau:

Bước 1: Kiểm tra với $\cos x = 0$. Có là nghiệm của phương trình (1') không?

Bước 2: Với $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình (1') cho $\cos^3 x \neq 0$. Ta được:

$$a\tan^3 x + b\tan^2 x + c\tan x + d = 0$$

Đặt $t = \tan x$ phương trình có dạng:

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0 \quad (2')$$

Bước 3: Giải phương trình (2') và kết luận .

Tuy nhiên, để linh hoạt, GV cần lưu ý cho HS rằng vì: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên với các nhân tử bậc k thì cũng coi là có bậc k+2 do vậy ta có dạng mở rộng của phương trình thuần nhất bậc ba: $a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x + (e\sin x + f\cos x) = 0.$

Vậy ví dụ 4 ta có thuật giải như sau:

Bước 1: Kiểm tra với $\cos x = 0$

Với $\cos x = 0$ (tức $\sin x = \pm 1$) khi đó phương trình trở thành:

$4.(\pm 1) - (\pm 1) = 0$. Nên $\cos x = 0$ không thỏa mãn.

Bước 2: Với $\cos x \neq 0$

Chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x \neq 0$. Ta được:

$$4\tan^3 x + 3\tan^2 x - (1 + \tan^2 x).\tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x + 3\tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

Đặt $t = \tan x$ phương trình có dạng: $3t^3 + 3t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(3t^2 - 1) = 0$

Bước 3: Giải phương trình và kết luận.

$$3t^3 + 3t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(3t^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ t = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Qua ví dụ 4, nhằm rèn luyện hoạt động T4 của TDTG cho HS. Từ đó GV cũng có thể củng cố, rèn luyện hoạt động T3 của TDTG bằng cách mở rộng phương pháp giải trên cho phương trình đẳng cấp bậc n đối với sin và cos, đó là phương trình có dạng: $\sum_{k=0}^{n} a_k \sin^{n-k} x \cos^k x = 0.$

Như vậy, với cách giải dạng phương trình đẳng cấp bậc n với sin và cos này HS đã biết, GV cần theo sát và hướng dẫn cho HS thực hiện tốt, đầy đủ và chính xác các hoạt động diễn ra trên lớp đối tượng này. Đây là vấn đề để kiểm tra HS nhìn nhận vấn đề một cách chính xác và đầy đủ hay không, bên cạnh đó nó cũng nói lên được khả năng thực hiện công việc theo một trình tự, một kế hoạch cụ thể của HS không những trong toán học mà cả trong cuộc sống hằng ngày.

e. Định hướng 5: Phát hiện thuật giải tối ưu để giải quyết bài toán

Ví dụ 5: Giải phương trình sau:

$$\cot x = \tan x + 2\tan 2x$$

ĐK:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

Đối với phương trình trên, HS có thể nghĩ đến phương pháp đặt ẩn phụ dẫn đến thuật giải như sau:

Bước 1: Đặt ẩn phụ

Đặt : $t = \tan x \Rightarrow \cot x = \dfrac{1}{t}$ và $\tan 2x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Bước 2: Biến đổi

Khi đó phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t} = t + \frac{4t}{1-t^2} \Leftrightarrow 1 - t^2 = t^2(1-t^2) + 4t^2$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 6t^2 + 1 = 0$$

Bước 3: Giải phương trình và kết luận

Nhận xét: Đối với thuật giải này HS phải giải phương trình bậc bốn ẩn t, sau đó quay lại cách đặt tìm x, phương pháp này tương đối phức tạp, với HS kĩ năng biến đổi kém dễ dẫn đến sai lầm trong lời giải.

GV có thể định hướng cho HS cách giải sử dụng phương pháp luận hệ số để phân tích với thuật giải như sau:

Bước 1: Biến đổi phương trình

$$\cot x - \tan 2x = \tan x + \tan 2x \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x \cos x - \sin 2x.\sin x)\cos x = \sin 3x \sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x.\cos x - \sin 3x.\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 0$$

Bước 2: Giải phương trình và kết luận

$$\cos 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Khi thực hiện ví dụ trên, GV cần cho HS hiểu rõ vấn đề: Nhớ và vận dụng thành thạo các quy trình thuật toán có sẵn là một việc làm cần thiết, song với thói quen tư duy của HS đó là suy nghĩ một chiều, dễ dàng chấp nhận những gì người khác nói thì GV cần định hướng cho HS việc cần đào sâu suy nghĩ, không nên dễ dàng chấp nhận điều có sẵn mà cần có ý thức và say mê huy động vốn tri thức của bản thân để tìm ra nhiều cách giải cho một bài toán, chỉ ra cách giải tối ưu.

3. Kết luận

Để phát triển TDTG cho HS đạt hiệu quả ca o, đòi hỏi người GV phải có kĩ năng sư phạm, cần biết được các phương thức hoạt động của TDTG nhằm thiết kế những bài toán, xây dựng được các quy trình dạy học theo hướng phát triển TDTG phù hợp với đối tượng HS.

(Xem tiếp trang 38)