

# ỨNG DỤNG PHẦN MỀM MAPLE TRONG DẠY HỌC KHÁM PHÁ KHẢO SÁT HÀM SỐ

**TS. PHAN ANH TÀI** - Trường Đại học Sài Gòn  
**ThS. NGUYỄN NGỌC GIANG** - Thành phố Hồ Chí Minh

## 1. Đặt vấn đề

Dạy học khám phá là phương pháp dạy học theo định hướng hoạt động hóa người học. Với phương pháp này, giáo viên (GV) “tổ chức cho học sinh (HS) học tập trong hoạt động và bằng hoạt động tự giác, tích cực, chủ động và sáng tạo”. Ngày nay, sự xuất hiện của các phần mềm tính toán hình thức như Maple, Matlab... giúp ích rất nhiều cho quá trình dạy học khám phá. Nếu biết khai thác các ứng dụng của chúng sẽ giúp HS có thêm một cách học và khám phá mới. Trong khuôn khổ bài viết này, chúng tôi đề cập đến một số ứng dụng Maple trong dạy học khảo sát hàm số.

## 2. Phương pháp dạy học khám phá

Khám phá là tìm thấy, phát hiện ra cái ẩn dấu, bí mật; là quá trình hoạt động và tư duy “nhằm đưa ra những khái niệm, phát hiện ra những tính chất, quy luật... trong các sự vật, hiện tượng và các mối liên hệ giữa chúng”. Theo Bùi Văn Nghị, “Phương pháp dạy học khám phá được hiểu là phương pháp dạy học trong đó dưới sự hướng dẫn của GV, thông qua các hoạt động, HS khám phá ra một tri thức nào đấy trong chương trình môn học” [1, tr.160].

Phân loại dạy học khám phá:

*Một là, khám phá dẫn dắt:* GV hướng dẫn để HS khám phá vấn đề và giải pháp giải quyết vấn đề.

*Hai là, khám phá hỗ trợ:* GV hướng dẫn để HS khám phá vấn đề và các em tự khám phá giải pháp giải quyết vấn đề.

*Ba là, khám phá tự do:* HS tự khám phá vấn đề và tự khám phá giải pháp giải quyết vấn đề (với các vấn đề không quá phức tạp).

## 3. Giới thiệu về phần mềm Maple

Phần mềm tính toán hình thức Maple là phần mềm do Đại học Waterloo (Canada) cho ra đời vào năm 1980. Kể từ thời điểm này, nhiều trường học trên thế giới đã có sự thay đổi phương pháp dạy học toán. Cùng với cách giải toán truyền thống, dạy HS thêm cách giải bằng phần mềm Maple. Với hơn 2500 hàm, phần mềm Maple giúp việc giải một số dạng toán dễ dàng và nhanh hơn so với cách giải toán truyền thống. Ưu điểm của dạy học giải toán khi ứng dụng phần mềm Maple là tính chính xác cao, xử lý tốt các bài toán có tính toán phức tạp...

Maple có các khái niệm cơ bản sau:

- *Lệnh:* Giao diện trực tiếp giữa người và máy thông qua việc gõ các lệnh sau dấu [ $>$ ];

- *Lệnh gán:* Việc gán tên một hằng, một biến, một biểu thức được thông qua lệnh gán ( $:=$ ). Khi đó hằng, biến, biểu thức về trái được gán tên ở vế phải.

Tên trong Maple được bắt đầu bằng một chữ cái, độ dài tối đa 496 kí tự và không có khoảng trống.

Có thể đặt các tên như sau: a, a1, a2, A1 (khác với a1), ab, abc, xy, xyz, ..., nghiem, Nghiem\_cua\_da\_thuc, ...;

- *Hàm:* Có nhiều cách xây dựng hàm. Khi sử dụng kí hiệu ánh xạ, việc gán giá trị cho hàm và việc thiết lập hàm hợp dễ hơn;

- *Gói thủ tục:* Đối với một số lĩnh vực đặc thù, Maple tạo nên các gói thủ tục (package). Đó là một tập hợp các hàm (chương trình viết sẵn) dành riêng cho lĩnh vực đó. Khi sử dụng đến lĩnh vực nào, cần nạp gói thủ tục cho phần ấy bằng lệnh With (tên gói thủ tục);

- *Các câu lệnh về Maple sử dụng trong bài viết*

$>$  **restart**

Lệnh này giúp giải phóng bộ nhớ.

$>$  **extrema (Y, { } , x ) ;**

Lệnh này giúp tìm cực trị của hàm số Y theo biến x

$>$  **plot ( {Y,m} x=m. .n , p. .q , color=red ;**

Lệnh này giúp vẽ đồ thị hàm số Y và đường thẳng m

$>$  **minimize ( f , x , x=a. .b ) ;**

Lệnh này giúp tìm giá trị cực tiểu của hàm số trong đoạn  $[a; b]$ .

$>$  **maximize ( f , x , x=a. .b ) ;**

Lệnh này giúp tìm giá trị cực đại của hàm số trong đoạn  $[a; b]$ .

$>$  **solve ( y , x ) ;**

Lệnh này giúp giải phương trình hàm số y.

## 4. Ứng dụng phần mềm Maple trong dạy học khám phá khảo sát hàm số

### 4.1. Gợi tình huống để xây dựng bài toán và khám phá cách giải

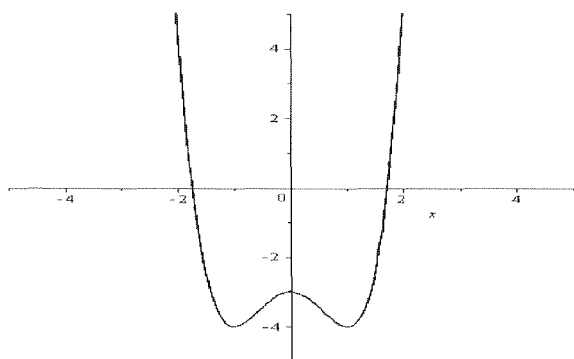
Sử dụng phần mềm phát hiện những thuộc tính đặc trưng của các bài toán thường gặp về khảo sát và vẽ đồ thị hàm số, từ đó để xuất bài toán trên cơ sở những hình ảnh trực quan, hình biểu diễn, những biểu tượng hoặc ngôn ngữ thể hiện,... Khi dạy học giải bài toán về khảo sát và vẽ đồ thị hàm số, GV không đưa ra ngay phương pháp giải (cách dạy mà hiện nay nhiều GV thường sử dụng). Thay vào đó, thông qua việc giới thiệu những đối tượng thỏa mãn điều kiện của bài toán (có thể đưa ra một vài đối tượng không thỏa mãn đầy đủ các khái niệm của bài toán), sử dụng phần mềm Maple, GV cho HS quan sát, phân tích nhằm hình thành những thuộc tính đặc trưng của các đối tượng đang xét để tự phân tích và khám phá cách giải bài toán.

*Ví dụ:* Với các giá trị nào của m, đường thẳng  $y = m$

cắt đường cong  $y = x^4 - 2x^2 - 3$  tại bốn điểm phân biệt.

Bước 1: GV sử dụng phần mềm Maple để tìm giá trị cực đại, cực tiểu cũng như vẽ đồ thị hàm số

```
> restart;
Y:=x^4-2*x^2-3:# Nhập vào biểu thức
f(x) sau dấu =
# Nhập vào các miền giới hạn của Ox
và Oy (x từ m .. n, y từ p..q)
m:=-5:n:=5:p:=-5:q:=2 :
print('Giá trị cực đại, cực tiểu của
hàm số:');
Ymax_min:=extrema(Y, {}, x);
Giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số :
Y max_min := {-4 ; -3}
> plot({Y,m}, x=m..n,p..q,color=red);
```



GV cho HS trả lời câu hỏi: Đồ thị cắt đường cong tại bốn điểm phân biệt khi nào?

Rõ ràng, nhờ có các điểm cực đại, cực tiểu và đồ thị hàm số trên phần mềm Maple, HS dễ dàng trả lời được câu hỏi. Đồ thị cắt đường cong tại bốn điểm phân biệt khi  $-4 < m < 3$ .

Bước 2: Yêu cầu HS chứng minh bài toán bằng phương pháp toán học

Nếu HS chưa chứng minh ngay được, GV đưa ra các câu hỏi dẫn dắt:

- Đồ thị  $y = x^4 - 2x^2 - 3$  cắt đường thẳng  $y = m$  tại bốn điểm phân biệt thì hệ phương trình có

$$\begin{cases} y = x^4 - 2x^2 - 3 \\ y = m \end{cases} \text{ có mấy nghiệm?}$$

HS trả lời: 4 nghiệm.

Em hãy rút ra lời giải bài toán?

HS giải toán như sau :

Hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong đã cho là nghiệm của phương trình  $x^4 - 2x^2 - 3 = m$ , tức là  $x^4 - 2x^2 - m - 3 = 0$ . (1)

Đặt  $X = x^2, X \geq 0$ , ta được

$$X^2 - 2X - m - 3 = 0. (2)$$

Đường thẳng cắt đường cong đã cho tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có bốn nghiệm

phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương  $X_1, X_2$  phân biệt, tức là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ X_1 X_2 > 0 \\ X_1 + X_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 4 > 0 \\ -m - 3 > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -3.$$

Bước 3: Yêu cầu HS phân tích bài toán về giao điểm của hai đồ thị bất kì

Nhiệm vụ của HS cần phân tích được bài toán giao điểm hai đồ thị. Cho hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$ , đồ thị của các hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  cắt nhau tại điểm  $M(x_0; y_0)$  khi và chỉ khi  $(x_0; y_0)$  là một nghiệm của hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Như vậy, hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên là nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$ .

Số nghiệm của phương trình trên bằng số giao điểm của hai đồ thị.

#### 4.2. Phát hiện, tìm kiếm, đề xuất các cách giải mới, các bài toán mới bằng các phương pháp tương tự hóa, khái quát hóa

Khám phá là tìm thấy, phát hiện ra cái ẩn dấu, bí mật. Việc phát hiện ra các bài toán mới, các cách giải khác nhau chính là một biểu hiện của sự khám phá. Sử dụng phần mềm Maple, HS phát hiện các bài toán mới và cách giải mới chính là "cái ẩn dấu" mà bài toán ban đầu chưa đề cập đến.

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau  $f(x) = x^2 + 2x - 5$  trên đoạn  $[-2; 3]$

Bước 1: GV cho HS tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên phần mềm Maple

```
> f:=x^2+2*x-5;
f := x^2 + 2x - 5
> minimize(f,x,x=-2..3);
-6
> maximize(f,x,x=-2..3);
10
```

Vậy, giá trị nhỏ nhất của hàm số là -6.

Giá trị lớn nhất của hàm số là 10.

Bước 2: Yêu cầu HS chứng minh bài toán bằng phương pháp toán học

Nếu HS chưa chứng minh ngay được, GV đưa ra các câu hỏi dẫn dắt:

- Em hãy tính đạo hàm của hàm số để từ đó tìm ra được điểm mà đạo hàm đổi dấu?

$$f'(x) = 2x + 2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1.a$$

Vậy điểm mà đạo hàm đổi dấu là  $x = -1$ .

- Em hãy lập bảng biến thiên?

Bảng biến thiên:



x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$			-	0	+	
$f(x)$	//		-5	10	//	

Từ bảng biến thiên, em hãy rút ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số?

$$\min_{x \in [-2;3]} f(x) = f(-1) = -6; \quad \max_{x \in [-2;3]} f(x) = f(3) = 10.$$

Bước 3: Yêu cầu HS phân tích bài toán tương tự, chẳng hạn bài toán trong ví dụ 2

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^2 + 2x - 7$  trên đoạn  $[-3; 5]$

Em hãy sử dụng phần mềm Maple để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số?

>  $f := x^2 + 2x - 7;$

$$f := x^2 + 2x - 7$$

> minimize (f, x, x=-3..5);

-8

> maximize (f, x, x=-3..5);

28

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là 28 và nhỏ nhất là -8.

Bước 4: Mở rộng bài toán cho hàm số bậc ba

HS đưa ra bài toán bất kì, chẳng hạn bài toán trong ví dụ 3.

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$\text{sau } f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4 \text{ trên đoạn } [-4; 0]$$

Sử dụng phương pháp tương tự trên, HS tự giải toán và đưa ra kết quả:

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $-\frac{16}{3}$ .

Giá trị lớn nhất của hàm số là -4.

### 4.3. Hình thành bài toán thực tế của bài toán toán học

Việc hình thành bài toán thực tế của bài toán toán học là một phương pháp khám phá rất thú vị nhưng cũng rất khó trong dạy học. Thông thường, GV đưa ra bài toán toán học và các câu hỏi để dẫn dắt HS đưa bài toán toán học thành bài toán thực tế. Hoạt động khám phá đối với dạng toán này chủ yếu là khám phá dẫn dắt với sự trợ giúp của phần mềm Maple.

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = 480x - 20x^2 \text{ trên } (0; +\infty).$$

Bước 1: GV cho HS tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên phần mềm Maple

> restart;

>  $f := 480*x - 20*x^2;$

$$f := -20x^2 + 480x$$

> maximize (f, x, x=0..+infinity);

2880

> solve (480\*x-20\*x^2=2880);

12,12

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là 2880 tại  $x = 12$

Bước 2: Gọi ý, thay  $x$  bởi  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) để HS phân tích

bài toán

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(n) = 480n - 20n^2$

trên  $(0; +\infty)$ .

Bước 3: GV dẫn dắt từ bài toán toán học

- Nếu  $P(n) = 48 - 20n$  là cân nặng (gam) trung bình

mỗi con cá sau một vụ nuôi thì  $n$  con cá sau một vụ cân nặng bao nhiêu gam?

- HS trả lời:  $f(n) = 480n - 20n^2$

- GV gợi ý để HS phân tích bài toán thực tế.

Một hợp tác xã nuôi cá trong hồ. Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng:

$$P(n) = 48 - 20n \text{ (gam)}$$

Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Em hãy giải bài toán?

Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì sau một vụ, số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ trung bình cân nặng:

$$f(n) = n.P(n) = 480n - 20n^2 \text{ (gam)} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Xét hàm số  $f(x) = 480x - 20x^2$  trên  $0; +\infty)$

(Biến  $n$  lấy các giá trị nguyên dương được thay bằng biến số  $x$  lấy các giá trị trên khoảng  $(0; +\infty)$ )

$$f'(x) = 480 - 40x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 12$$

x	0	12	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
		-	
$f(x)$	f(12)		

Trên  $(0; +\infty)$  hàm số  $(f(x))$  đạt giá trị lớn nhất tại  $x = 12$

Suy ra trên tập hợp  $\mathbb{N}^*$  các số nguyên dương, hàm số  $f$  đạt giá trị lớn nhất tại điểm  $n = 12$ .

Vậy muốn thu hoạch được nhiều cá nhất sau một vụ thì trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ phải thả 12 con cá.

### 5. Kết luận

Việc khai thác và sử dụng chức năng trợ giúp của phần mềm dạy học Maple có thể thực hiện hiệu quả trong dạy học nhiều nội dung của môn Toán và các môn học khác. Tổ chức các hoạt động khám phá trong dạy học, HS tự hình thành tri thức, biến tri thức của nhân loại thành tri thức của chính mình. Kiến thức hình thành bằng con đường khám phá sẽ nhớ lâu hơn. Dạy học khám phá giúp HS phát triển tư duy, đặc biệt là tư duy độc lập, sáng tạo cũng như các kĩ năng cần thiết trong cuộc sống.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- [1]. Bùi Văn Nghi, (2009), *Vận dụng lí luận vào thực tiễn dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm.
- [2]. Nguyễn Bá Kim, (2011), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm.
- [3]. Nguyễn Văn Quý - Nguyễn Tiến Dũng - Nguyễn Việt Hà, (1998), *Giải toán trên máy tính maple với các chuyên đề: Số học - Đại số - Giải tích - Hình giải tích*, NXB Đà Nẵng.
- [4]. Đoàn Quỳnh - Nguyễn Huy Đoan - Trần Phương Dung - Nguyễn Xuân Liêm - Đặng Hùng Thắng, (2011), *Giải tích 12 nâng cao*, NXB Giáo dục Việt Nam.

**SUMMARY**

*Discovery teaching helps students' development thinking, especially independent thinking, creativity and necessary skills in life. Today, the presence of calculation software such as Maple, Matlab... were very helpful for discovery teaching. The exploitation and usage of the support functions in Maple software can perform effectively in teaching mathematics content and other subjects. In this article, the author refers to some applications of Maple software in teaching function survey.*

**Keywords:** Maple software; discovery teaching; function survey.

**KIỂM TRA ĐÁNH GIÁ KẾT QUẢ HỌC TẬP... (Tiếp theo trang 13)**

**Mục đích ĐG của từng câu hỏi**

- Câu 1:** Khả năng phân tích, lựa chọn dữ liệu của HS.
- Câu 2:** Khả năng suy luận của HS.
- Câu 3:** Khả năng suy luận và giải thích vấn đề của HS.
- Câu 4:** Khả năng vận dụng công thức của HS.

**Hướng dẫn mã hoá (Đáp án câu hỏi)**

**Câu 1**

**Mức đầy đủ:**

Mã 1: B. Johannesburg.

**Không đạt:**

Mã 0: Đáp án khác.

Mã 9: Không trả lời.

**Câu 2**

**Mức đầy đủ:**

Mã 2: 1. Đúng 2.Sai 3. Đúng 4. Sai

**Mức không đầy đủ:**

Mã 1: Ba trên bốn câu trả lời đúng.

**Không đạt:**

Mã 0: Đáp án khác.

Mã 9: hông trả lời.

**Câu 3**

**Mức đầy đủ:**

**Mã 2:** Do độ ẩm của không khí lớn khiến cho nước bay hơi rất chậm nên mồ hôi thoát ra từ cơ thể cũng lâu khô làm ta cảm thấy oi bức.

**Mức không đầy đủ:**

Mã 1: Trả lời đúng nhưng không có giải thích.

**Không đạt:**

Mã 0: Đáp án khác.

Mã 9: Không trả lời.

**Câu 4**

**Mức đầy đủ:**

Mã 1: C. Trong 1m<sup>3</sup> không khí chứa 28g hơi nước ở

30°C.

**Không đạt:**

Mã 0: Đáp án khác.

Mã 9: Không trả lời.

**5. Kết luận**

KT, ĐG KQHT là một khâu quan trọng của quá trình DH. KT ĐG KQHT theo định hướng phát triển NL hướng vào khả năng vận dụng kiến thức, KN đã học để giải quyết những vấn đề trong học tập và thực tiễn cuộc

sống, phù hợp với mục tiêu DH của môn Vật lí ở trường phổ thông. Để thực hiện KT, ĐG KQHT theo định hướng phát triển NL, trước hết phải xác định được các NL đặc thù môn Vật lí tương ứng với mỗi phần nội dung cần KT, ĐG. Trên cơ sở đó, giáo viên lựa chọn phương pháp, hình thức tổ chức KTĐG phù hợp, đặc biệt là bước thiết kế đề KT. Vận dụng cách ĐG của PISA vào thiết kế đề KT/thi là một hướng đổi mới KT ĐG kết quả học tập môn Vật lí theo định hướng phát triển NL.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- [1]. Bộ GD&ĐT, (2015), Dự thảo *Chương trình tổng thể trong Chương trình GD phổ thông mới*.
- [2]. Bộ GD&ĐT, (2014), *Tài liệu tập huấn DH và KT, ĐG KQHT theo định hướng phát triển NL HS*, Vụ GD Trung học, Chương trình Phát triển GD trung học.
- [3]. Bộ GD&ĐT, (2014), *Tài liệu tập huấn PISA 2015 và các dạng câu hỏi do OECD phát hành lĩnh vực khoa học*.
- [4]. Hoàng Đức Nhuận - Lê Đức Phúc, (1995), *Cơ sở lí luận của việc ĐG chất lượng học tập của HS phổ thông*, Đề tài Khoa học Công nghệ cấp Nhà nước KX-07-08, Hà Nội.
- [5]. Vũ Trọng Rỹ, (2015), *Đề cương bài giảng Đổi mới KT ĐG KQHT môn Vật lí ở trường phổ thông* (Tài liệu dùng cho học viên cao học chuyên ngành Lí luận và phương pháp DH bộ môn Vật lí), Trường Đại học Sư phạm TP.HCM.
- [6]. Phạm Hữu Tông (Chủ nhiệm đề tài QS96.01), (1998), *Xây dựng quy trình, nội dung và hình thức KT ĐG kiến thức, KN của sinh viên đại học sư phạm*, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

**SUMMARY**

*This article presents ideas of examining and assessing students' learning outcomes generally and in Physics particularly towards competence development. The author also clarifies 4 groups of competencies in learning Physics and methods, technique, process in assessing learning outcomes towards competence development; suggests applying PISA's assessment in designing Physics tests.*

**Keywords:** Competence in Physics; learning outcomes assessment; students.