MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TOÁN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

TS. TRẦN TRUNG - ThS. LA ĐỨC MINH
Trường Dự bị Đại học Dân tộc Sầm Sơn

1. Mở đầu

Trong dạy học toán ở trường trung học phổ thông (THPT), phương pháp định hướng trực tiếp cho hoạt động và có ảnh hưởng trực tiếp đến việc rèn luyện kĩ năng. Dạy học môn Toán không chỉ hình thành cho học sinh các tri thức về sự vật, tri thức về đối tượng nghiên cứu của môn học mà còn hình thành và phát triển hệ thống tri thức phương pháp cho HS. Các tri thức phương pháp khi được hình thành lại trở thành điều kiện thuận lợi để HS lĩnh hội, kiến tạo tri thức mới.

2. Phương pháp giải toán

Giải toán là quá trình mò mẫm, tìm tòi dựa trên những hiểu biết của người làm toán. Vì vậy, giải toán là khả năng riêng biệt của trí tuệ, còn trí tuệ chỉ có ở con người và giải toán có thể xem như một trong những biểu hiện đặc trưng nhất trong hoạt động của người học toán. Quá trình giải một bài toán là đi tìm kiếm một lối thoát ra khỏi khó khăn hoặc một con đường vượt qua chướng ngại để đạt tới mục đích mà mới nhìn thì tưởng như không thể đạt được ngay.

Phương pháp giải toán (hay phương pháp tìm lời giải bài toán) là cách thức và ứng xử của người làm toán khi đứng trước một bài toán để gây nên những hoạt động tư duy của bản thân nhằm tìm ra lời giải của bài toán đó. Những hoạt động tư duy bao gồm: khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự, quy nạp, phân tích, tổng hợp, so sánh... đặc biệt là suy luận có lí. Để giải quyết một bài toán cần thực hiện hai bước chủ yếu, đó là tìm ra phương pháp giải và thực hiện lời giải.

Đứng trước một bài toán đã có phương pháp giải thì việc giải bài toán một cách hoàn chỉnh không phải hoàn toàn đơn giản, mà là cả một quá trình bao gồm nhiều khâu: nắm vững các kiến thức cơ bản về nội dung lí thuyết lẫn phương pháp thực hành, luyện tập thành thạo các quy trình và thao tác có tính chất kĩ thuật. Đối với bài toán chưa có thuật giải, người giải toán cần thể hiện tính nghiêm túc, kiên nhẫn, quá trình mò mẫm, tìm tòi và một phương pháp làm việc khoa học.

2.1. Một số phương pháp giải bài tập toán ở trường trung học phổ thông

Quá trình học sinh học phương pháp chung giải toán là quá trình biến những tri thức phương pháp tổng quát thành kinh nghiệm giải toán của bản thân mình thông qua việc giải hàng loạt bài toán cụ thể. Giải một bài toán hay hệ thống các bài toán là tiến hành một hệ thống hành động có mục đích, do đó chủ thể giải toán cần phải nắm vững các tri thức về hành động, thực hiện hành động theo yêu cầu cụ thể của tri thức đó, biết hành động có kết quả trong những điều kiện khác nhau. Trong giải toán thì điều cần thiết ở học sinh chính là khả năng vận dụng sáng tạo, có mục đích những tri thức và kinh nghiệm đã có vào giải các bài toán cụ thể, thực hiện tốt và có kết quả một hệ thống hành động giải toán để đi đến lời giải bài toán một cách khoa học. Còn người giáo viên chủ yếu là định hướng cho học sinh biết tìm cách khám phá ra lời giải của bài toán và thủ thuật tìm tòi các hệ thống bài toán liên quan. Định hướng cho học sinh vận dụng các bài toán gốc vào giải quyết các bài toán khó.

Để tìm phương pháp giải một bài tập toán cụ thể, học sinh cần căn cứ vào các yếu tố sau:

- Giả thiết bài toán: Từ giả thiết phải nghiên cứu các đặc điểm về dạng của bài toán. Các đặc điểm về dạng của bài toán là phần hình thức của bài toán đó, nên việc nghiên cứu phần hình thức của bài toán thực chất là khám phá nội dung của bài toán. Bởi lẽ, giữa hình thức và nội dung có tính thống nhất. Vì vậy, nhờ vào việc khai thác đúng đắn các đặc điểm về dạng của bài toán mà nhiều bài toán có được lời giải hoặc lời giải hay. Đặc điểm đó thể hiện mối liên hệ giữa các đối tượng và các nhóm có mặt trong bài toán đó; đặc điểm về dạng của bài toán còn thể hiện tính chất không "mẫu mực" hay tính chất "tàng ẩn" của dạng bài toán.

Yêu cầu bài toán đặt ra cần giải quyết: Thông qua yêu cầu bài toán có thể xác định được thể loại bài toán. Từ đó người giải toán thấy rõ các tính chất, quy luật của bài toán, vạch được phương hướng giải, tìm được các phương pháp giải phù hợp.

Yêu cầu đối với lời giải bài toán: Kết quả đúng, kể cả ở các bước trung gian, lời giải không mắc phải những sai lầm, thỏa mãn các yêu cầu đề ra; lập luận chặt chẽ, luận đề phải nhất quán, luận cứ phải đúng, luận chứng phải hợp lôgic; lời giải đầy đủ, không được bỏ sót một chi tiết nào trong quá trình suy luận; ngôn ngữ chính xác; trình bày rõ ràng; cách giải ngắn gọn, hợp lí nhất. Nghiên cứu giải những bài toán tương tự, mở rộng hay lật ngược vấn đề.

2.1.1. Phương pháp có thuật giải

- *Phương pháp 1:* Biến đổi tương đương

Chẳng hạn, để giải một phương trình hoặc chứng minh một bất đẳng thức, thông thường ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn hoặc bất đẳng thức đó thành bất đẳng thức đúng. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương. Phép biến đổi tương đương đó có thể là cộng hay trừ từng vế với cùng một số hoặc một biểu thức, nhân hai vế cùng một số khác không hoặc một biểu thức khác không,... Nếu học sinh nắm vững phép biến đổi tương đương thì việc giải quyết bài toán trở nên đơn giản.

- *Phương pháp 2:* Chứng minh bằng phản chứng

Nguyên lí của phương pháp chứng minh bằng phản chứng $A \Rightarrow B$ đúng ta cần chứng minh giả sử $A \Rightarrow B$ không đúng ta suy ra điều mâu thuẫn với giả thiết hoặc điều vô lí. Từ đó kết luận không tồn tại giả sử $A \Rightarrow B$ phải đúng.

- *Phương pháp 3:* Phương pháp quy nạp toán học

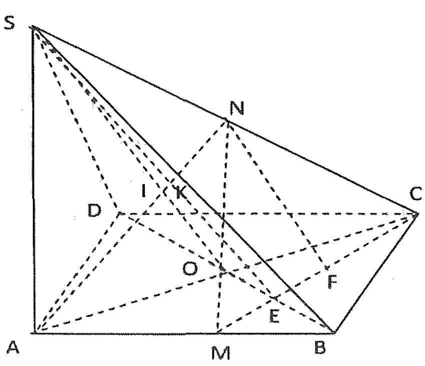
Nguyên lí quy nạp toán học áp dụng vào bài toán chứng minh bất đẳng thức phụ thuộc số tự nhiên n.

Nếu bất đẳng thức kiểm tra đúng với số tự nhiên n_0.

Giả thiết rằng bất đẳng thức đúng với $n = k$ mà ta chứng minh được bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$ thì bất đẳng thức đã cho đúng với $n \geq n_0$.

- *Phương pháp 4:* Phương pháp quy trình

Đối với những bài toán thuộc dạng như: tìm giới hạn, đạo hàm của hàm số; chứng minh hàm số liên tục; giải phương trình bậc hai; khảo sát hàm số, tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, giao điểm của hai đường thẳng, đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng... chúng ta có thể áp dụng quy trình có tính chất thuật giải, tựa thuật giải để giải quyết các bài toán trên.



Ví dụ 1: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. M, N là điểm giữa các đoạn AB, SC. Tìm giao điểm I, K của đường thẳng AN, MN với mặt phẳng (SBD),

Tính các tỉ số $\frac{IA}{IN}; \frac{KM}{KN}$.

Trước hết, ta lưu ý rằng quy trình tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng α là như sau:

Bước 1: Chọn mặt phẳng β chứa d, sao cho giao tuyến d' của mặt phẳng α và β tìm được ngay.

Bước 2: Tìm giao điểm O của d và d' trong mặt phẳng β.

Bước 3: Kết luận O là điểm cần tìm.

Như vậy, với bài toán trên ta áp dụng quy trình giải như sau:

Chọn (SAC) là mặt phẳng chứa AN. Mặt phẳng (SAC) cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến SO, với O là tâm của đáy. Giao điểm của AN với SO chính là điểm I cần tìm.

Dễ thấy I là trọng tâm tam giác SAC nên $\frac{IA}{IN} = 2$

Tương tự gọi E là giao điểm của MC và BD; mặt phẳng (MSC) chứa MN cắt (SBD) theo giao tuyến SE. Vậy giao điểm của MN và SE là giao điểm K của MN với mặt phẳng (SBD).

Do $\frac{EM}{EC} = \frac{BM}{DC} = \frac{1}{2}$, nên nếu gọi F là điểm giữa EC thì ME = FE = FC. Do đó NF là đường trung bình của tam giác SEC. Vậy NF song song với SE. Suy ra KE là đường trung bình của tam giác MNF, từ đó suy ra $\frac{KM}{KN} = 1$.

2.1.2. Phương pháp tìm đoán

- *Phương pháp 1:* Phân tích, biến đổi đồng thời giả thiết và kết luận

Với giả thiết đã cho và yêu cầu bài toán đã được xác định người giải toán phải làm cho giả thiết và kết luận gần gũi hơn. Từ đó dùng phép biến đổi giả thiết phù hợp, đồng thời định hướng phép biến đổi kết luận đạt kết quả như mong muốn.

- *Phương pháp 2:* Phương pháp sử dụng trực giác và diễn dịch

Trực giác là một hoạt động hay cách nhìn vấn đề, trực giác không những cho chúng ta nhìn nhận vấn đề rõ ràng mà còn cho chúng ta một số chân lí về thực tại. Diễn dịch là một cái gì tương tự như trực giác, nhờ trực giác chúng ta nắm được chân lí một cách hoàn toàn và trực tiếp, và nhờ diễn dịch chúng ta đạt đến chân lí qua một tiến trình. Descartes nói rằng: "hai phương pháp này là những con đường chắc chắn nhất dẫn tới tri thức".

- Phương pháp 3: Chuyển hóa nội dung bài toán

Trong toán học, có nhiều loại toán liên quan đến nhau, mối quan hệ giữa chúng trong chừng mực nào đó cho phép giải bài toán này thông qua việc giải bài toán kia.

Chẳng hạn, xuất phát từ bài toán chứng minh bất đẳng thức $f(x) \le M$, ta có thể chuyển nội dung bài toán này về bài toán tìm giá trị nhỏ nhất $f(x)$, sao cho giá trị nhỏ nhất đó bằng M. Để tìm giá trị nhỏ nhất đó ta dùng công cụ đạo hàm thì bài toán dễ dàng được giải quyết.

- Phương pháp 4: Lựa chọn công cụ để giải toán

Việc lựa chọn các công cụ khác nhau để giải toán là cần thiết. Trên cơ sở phân tích các đặc điểm của bài toán, chúng ta sẽ thấy được công cụ nào sẽ phù hợp với bài toán này, công cụ nào phù hợp với bài toán kia. Nhờ việc chọn công cụ thích hợp mà lời giải bài toán cho ta kết cục đẹp.

- Phương pháp 5: Liên tưởng, huy động kiến thức để giải

Liên tưởng và huy động kiến thức có vai trò quan trọng trong hoạt động tư duy khi giải toán. Năng lực *liên tưởng, huy động* kiến thức của mỗi người một khác. Đứng trước một bài toán cụ thể, có người liên tưởng được nhiều định lí, mệnh đề, bài toán phụ mà những cái này có hy vọng giúp cho việc giải bài toán. Có người chỉ liên tưởng được đến một số ít định lí, mệnh đề, bài toán phụ,.... *Sức liên tưởng và huy động* phụ thuộc vào khả năng tích luỹ kiến thức và sự nhạy cảm trong khâu phát hiện vấn đề.

- Phương pháp 6: Chuyển hóa hình thức bài toán

Việc chuyển hóa hình thức bài toán chính là biến đổi đối tượng, bằng hoạt động trí tuệ, các thao tác tư duy dựa trên các tri thức kinh nghiệm đã có để xâm nhập vào đối tượng nghiên cứu thông qua biến đổi cấu trúc của đối tượng.

Ví dụ 2: Với $a,b,c,d \in R$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

Ta có thể biến đổi đối tượng đại số sang hình học như sau:

Trên mặt phẳng tọa độ xét các điểm: A(a,b); B(c,d) và O(0,0). Khi đó:

$$OA=\sqrt{a^2+b^2}\ ;\ OB=\sqrt{c^2+d^2}\ ;$$

$$AB=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\ .$$

Ta luôn có $OA+OB \ge AB \Rightarrow$

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

- Phương pháp 7: Phương pháp đánh giá đại diện.

Trong nhiều bài toán mà các đối tượng có mặt trong bài toán có chung một quy luật tổng quát thì đánh giá đại diện là việc làm cần thiết. Nhờ đó, việc thực hiện giải bài toán thuận lợi hơn.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $2^{x-3} = -x^2 + 6x - 8$

Gặp bài toán này nếu nhìn nhận $2^{x-3} \ge 1 \forall x$ và $-x^2 + 6x - 8 = -(x-3)2 + 1 \le 1 \forall x$

Ta dễ dàng thấy phương trình $2^{x-3} = -x^2 + 6x - 8$ có nghiệm thì: $2^{x-3} = -x^2 + 6x - 8 = 1 \Rightarrow x = 3$.

3. Kết luận

Dạy học giải bài tập toán có vai trò đặc biệt trong dạy học môn Toán ở trường trung học phổ thông. Các bài toán là phương tiện có hiệu quả không thể thay thế được trong việc giúp học sinh nắm vững tri thức, phát triển tư duy, hình thành kĩ năng và kĩ xảo. Hoạt động giải bài tập toán là điều kiện để thực hiện tốt các mục đích khác của dạy học môn Toán. Do đó, tổ chức có hiệu quả việc dạy giải bài tập toán có vai trò quyết định đối với chất lượng dạy học môn Toán ở trường phổ thông hiện nay.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Edgarmorin (2006), *Tri thức về tri thức* (Lê Diên dịch), NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[2]. Nguyễn Bá Kim (2006), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm.

[3]. Nguyễn Thái Hòe (1997), *Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập toán*, NXB Giáo dục.

[4]. Bùi Văn Nghị (2009), *Vận dụng lí luận vào thực tiễn dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm.

[5]. G. Polya (1975), *Giải bài toán như thế nào*, NXB Giáo dục.

SUMMARY

In teaching Mathematics in upper secondary schools, the activity-based teaching approach has a direct impact on the forging of skills. Teaching Mathematics subject does not only equip students with factual knowledge and knowledge of the research subject embedded within the subject matter per se but also formulate and develop the system of methodological knowledge for students. Bearing that in mind, the author has proposed some methods for solving Mathematical problems in upper secondary schools, including, for example, Heuristic method and educated guess method.