XÂY DỰNG VÀ TỔ CHỨC MỘT SỐ TÌNH HUỐNG DẠY HỌC TOÁN NHẰM BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC BIẾN ĐỔI THÔNG TIN CHO HỌC SINH

ThS. LÊ THỊ HƯƠNG
Trường Cao đẳng Sư phạm Quảng Trị

Đặt vấn đề

Việc dạy học nói chung cũng như dạy học môn Toán nói riêng muốn đạt được kết quả thì điều quan trọng là người giáo viên phải biết thiết lập những tình huống dạy học có dụng ý sư phạm tốt, những tình huống dạy học phù hợp để tổ chức cho người học học tập có hiệu quả trong hoạt động và bằng hoạt động. Trong những tình huống đó, giáo viên đề xuất các vấn đề sao cho học sinh tích cực, tự giác đảm đương trách nhiệm kiến tạo tri thức, hình thành, biến đổi hoặc điều chỉnh những kiến thức của họ để đáp ứng mục tiêu của quá trình dạy học.

Chính vì vậy, để nâng cao hiệu quả hoạt động dạy học Toán ở trường phổ thông, bài viết này chúng tôi đề cập đến việc xây dựng và tổ chức một số tình huống dạy học Toán nhằm bồi dưỡng năng lực biến đổi thông tin (BĐTT) cho học sinh.

1. Biến đổi thông tin toán học và năng lực biến đổi thông tin toán học

1.1. Biến đổi thông tin toán học

Trên cơ sở nghiên cứu, phân tích những quan điểm về BĐTT toán học từ các góc độ nhìn nhận khác nhau, chúng tôi rút ra một khái niệm chung về BĐTT toán học là quá trình liên tưởng đến các vấn đề đã biết và huy động các kiến thức liên quan thông qua việc sử dụng các hoạt động trí tuệ phù hợp để tiến hành hoạt động điều ứng nhằm tạo ra sơ đồ nhận thức phù hợp, từ đó để tiếp nhận tri thức mới một cách hiệu quả.

Như vậy, trong dạy học môn Toán, BĐTT toán học phải được biểu hiện trong khái niệm trên ở một số khía cạnh:

- Người học phải có khả năng quan sát, liên tưởng để kết nối các mối quan hệ giữa những thông tin đã biết và thông tin cần khám phá;
- Người học phải biết huy động những kiến thức đã biết một cách hợp lí, linh hoạt;
- Người học phải biết sử dụng hiệu quả các hoạt động trí tuệ như so sánh, phân tích, tổng hợp, tương tự, khái quát hóa...để hoạt động BĐTT diễn ra thuận lợi;
- BĐTT toán học phải được thực hiện thông qua nhiều hoạt động: biến đổi các đối tượng toán học để xâm nhập vào đối tượng ấy, tổ chức và cấu trúc lại sơ đồ nhận thức cho phù hợp với việc tiếp nhận thông tin mới...;
- BĐTT toán học phù hợp sẽ góp phần thực hiện hiệu quả việc tiếp nhận tri thức mới, giải quyết tốt các vấn đề đặt ra trong dạy học Toán.

1.2. Năng lực biến đổi thông tin toán học

Khi bàn về năng lực bao giờ cũng phải nói đến năng lực đối với một hoạt động cụ thể nào đó. Chẳng hạn, năng lực toán học của hoạt động học tập hay hoạt động nghiên cứu toán học, năng lực giảng dạy của hoạt động giảng dạy...BĐTT toán học là một hoạt động quan trọng trong quá trình học tập của học sinh. Như vậy, từ việc nghiên cứu, phân tích những quan điểm, các khái niệm về năng lực, năng lực toán học, BĐTT toán học đồng thời vận dụng vào thực tiễn dạy học ở trường phổ thông, chúng tôi quan niệm: Năng lực BĐTT toán học là một năng lực toán học bao gồm tổ hợp các thành tố năng lực thành phần nhằm thực hiện hoạt động BĐTT toán học trong quá trình học tập của học sinh.

2. Một số tình huống dạy học nhằm bồi dưỡng năng lực biến đổi thông tin toán học cho học sinh

2.1. Tình huống dạy học phát hiện và giải quyết các vấn đề có chứa những mâu thuẫn, khó khăn và những sự mất cân bằng

Theo lí thuyết kiến tạo, trong tâm lí học, học tập là một quá trình trong đó người học xây dựng kiến thức cho mình bằng cách thích nghi với môi trường sinh ra những khó khăn, mâu thuẫn hay sự mất cân bằng. Muốn kích thích hứng thú và tạo ra nhu cầu hoạt động học tập của học sinh nói chung cũng như hoạt động bồi dưỡng năng lực BĐTT toán học nói riêng thì giáo viên phải tạo ra những tình huống đặt học sinh trước những khó khăn, trong môi trường sinh ra mâu thuẫn hay có chướng ngại, mất cân bằng trong quá trình nhận thức.

Khi gặp khó khăn trong nhiệm vụ nhận thức, giáo viên phải thiết kế các tình huống dạy học tạo nhu cầu cho học sinh biết cách khắc phục để vượt qua nó bằng cách huy động những kiến thức và phương pháp sẵn có để tạo lập các mối quan hệ...Đứng trước một vấn đề có chứa mâu thuẫn trong nhận thức, học sinh phải biết tìm cách giải quyết nó. Khi gặp một chướng ngại hay sự mất cân bằng xảy ra mà không thể thực hiện được quá trình đồng hóa thì học sinh phải biết cấu trúc lại nó để thực hiện hoạt động điều ứng mà thích nghi với tình huống mới đặt ra.

Ví dụ 1: Khi học xong cách giải phương trình bậc nhất, học sinh lớp 8 dễ dàng thực hiện yêu cầu giải phương trình:

$$\frac{x+3}{2}+1=\frac{2x-3}{3}$$

bằng cách quy đồng mẫu số. Cách làm này sẽ là một khó khăn cho học sinh khi thực hiện yêu cầu giải phương trình:

$$\frac{x+2}{998}+\frac{x+8}{992}=\frac{x+4}{996}+\frac{x+6}{994}$$

Đứng trước tình huống có vấn đề chứa khó khăn trên, giáo viên hướng dẫn học sinh phân tích đặc điểm của các số hạng trong phương trình và từ đặc điểm 998 + 2 = 992+8 = 996 + 4 = 994 + 6 = 1000 để có cách đưa giải quyết bài toán phù hợp là đưa phương trình về dạng:

$$\frac{x+2}{998}+1+\frac{x+8}{992}+1=\frac{x+4}{996}+1+\frac{x+6}{994}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1000}{998}+\frac{x+1000}{992}=\frac{x+1000}{996}+\frac{x+1000}{994}$$

Và đưa về phương trình bậc nhất x + 1000 = 0 $\Leftrightarrow$ x = -1000.

Ví dụ 2: Khi học xong cách giải phương trình quy về bậc hai thì học sinh lớp 9 có thể giải phương trình:

$$\sqrt{2x^2+x}=2x+1$$

bằng cách bình phương 2 vế của phương trình. Cách làm đó sẽ là một chướng ngại cho học sinh khi thực hiện yêu cầu giải phương trình:

$$\sqrt{2x^2+x}=4x^2+2x-3$$

vì nó sẽ đưa về một phương trình bậc cao chưa có phương pháp giải.

Học sinh phải biết khắc phục chướng ngại đó bằng việc phân tích mối quan hệ giữa các số hạng của phương trình và đưa ra một phương pháp giải mới - phương pháp đặt ẩn phụ để đưa phương trình về dạng:

$$\begin{cases} t=\sqrt{2x^2+x} \quad, t\geq 0 \\ 2t^2-t-3=0 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Đối với học sinh lớp 6, sau khi học xong phần phân số bằng nhau ta yêu cầu giải bài toán: Ta có thể cộng cả tử và mẫu của phân số 12/21 với cùng 1 số bằng bao nhiêu để được phân số 8/11. Lúc này, một mâu thuẫn trong nhận thức của học sinh xuất hiện đó là 12 > 8, 21 > 11. Vậy làm thế nào để có thể cộng thêm vào tử số và mẫu số của 12/21 để được phân số 8/11 . Như vậy, cần tạo ra nhu cầu cho học sinh biến đổi 12/21 = 4/7 rồi thực hiện cộng

$\frac{4+4}{7+4}=\frac{8}{11}$ hoặc biến đổi $\frac{8}{11}=\frac{24}{33}$

$\frac{12+12}{21+12}=\frac{24}{33}$ rồi thực hiện.

2.2. Tình huống dạy học mà trong đó hình thức diễn đạt một vấn đề nó che khuất nội dung toán học cần khám phá trong vấn đề đó từ đó phải biến đổi thông tin toán học để hình thức phù hợp với nội dung cần khai thác

Theo quan điểm triết học, nội dung là tổng hợp tất cả những mặt, những yếu tố tạo nên sự vật hiện tượng. Hình thức là phương thức tồn tại và phát triển của sự vật hiện tượng, là hệ thống các mối liên hệ tương đối bền vững giữa các yếu tố của sự vật, hiện tượng.

Trong thực tế, nhiều bài toán thì hình thức biểu thị của nó che khuất đi nội dung toán học cần khám phá, cần khai thác thì giáo viên phải hướng dẫn thực hiện quá trình BĐTT về bài toán, thay đổi hình thức biểu diễn bài toán cho tới khi học sinh có thể huy động và sử dụng kiến thức sẵn có để giải quyết vấn đề đặt ra.

Ví dụ 4: Cho a, b, c là các số thỏa mãn $a^{2013}(a+b+c) < 0$ chứng minh rằng $b^2 - 4ac > 0$

Ta thấy với hình thức biểu thị $a^{2013}(a+b+c) < 0$ thì khó hình dung và chưa thể huy động được kiến thức về tam thức bậc hai mà học sinh đã biết để giải quyết. Vì vậy, ta thực hiện việc biến đổi hình thức bài toán về dạng: $a(a+b+c) < 0$ (nhờ $a^{2012} \geq 0$) để từ đó, học sinh sử dụng kiến thức đã có và đưa về

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4}<0$$

rồi suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5: Giải bất phương trình

$$3^{x^2-4}+\left(x^2-4\right)3^{x-2}\geq 1$$

Ta thấy rằng, học sinh sẽ bị hình thức biểu thị của bài toán che khuất nên khó tìm ra được cách biến đổi thông thường hay hình dung được hướng giải quyết nội dung bài toán.

Vì vậy, giáo viên cần chú ý hướng dẫn việc phân tích các số hạng vế trái của bất phương trình để từ đó có hướng BĐTT và đánh giá phù hợp.

+Nếu $|x|\geq 2$ *thì* $3^{x^2-4}\geq 3^0=1$; $\left(x^2-4\right)3^{x-2}\geq 0$
Vậy bất phương trình luôn đúng.

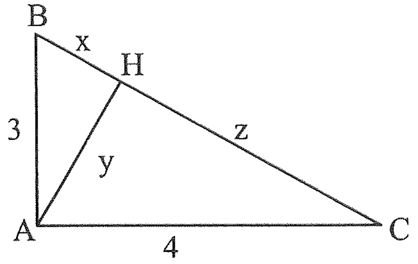
+ Nếu $|x|<2$ *thì* $3^{x^2-4}<3^0=1$; $\left(x^2-4\right)3^{x-2}<0$
mâu thuẫn với bài toán

Từ đó, suy ra nghiệm của bất phương trình $|x|\geq 2$

2.3. Tình huống dạy học mà tri thức và phương pháp đã có chưa đủ để giải quyết vấn đề đặt ra từ đó phải thực hiện hoạt động chuyển hóa các liên tưởng để chủ thể có thể xâm nhập vào vấn đề nhằm bộc lộ và giải quyết vấn đề đó

Ví dụ 6: Cho x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + z^2 = 16 \\ y^2 = xz \end{cases}$

Tính A = xy + yz



Ta nhận thấy rằng, để tính giá trị của A ta thực hiện kĩ thuật biến đổi đồng nhất A về dạng có thể sử dụng các giả thiết ở trên là khó khăn. Tuy nhiên, từ 3 giả thiết đó ta có thể giúp học sinh liên tưởng đến các kết quả trong tam giác vuông (định lí Pitago, định lí hình chiếu) để có thể biến đổi chuyển bài toán đại số đó về bài toán hình học bằng cách: xét tam giác vuông ABC với AB = 3; AC = 4, đường cao AH = y; BH = x; CH = z thỏa mãn các điều kiện ở giả thiết trên. Khi đó

A = xy + yz = (x+z)y = BC.AH = 2S∆SBC = AB.AC = 12

Ví dụ 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$M = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$$

Từ thông tin đã cho của bài toán, ta thấy rằng việc sử dụng định nghĩa giá trị nhỏ nhất và vận dụng các kĩ thuật biến đổi trong đại số (biến đổi tương đương, sử dụng các tính chất của bất đẳng thức...) sẽ rất khó khăn. Tuy nhiên, từ các biểu thức đã cho ở các số hạng của M giúp ta liên tưởng đến bài toán về độ dài hình học. Khi đó, ta thực hiện chuyển đổi như sau:

Ta có thể biến đổi về dạng:

$$M = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Và liên tưởng đến công thức tính độ dài của một đoạn thẳng trong hình học và chuyển về chọn

$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right);\ C(x, 0)$$

Khi đó: M = AC + CB ≥ AB; AB = $\sqrt{2}$

Suy ra giá trị cần tìm, min M = $\sqrt{2}$ khi x = $\sqrt{3} - 1$

Hai dạng chuyển hóa liên tưởng trên là chuyển hóa liên tưởng là từ ngôn ngữ toán học này sang ngôn ngữ toán học khác. Trong nội tại một loại ngôn ngữ hình học, đại số... chúng ta cũng có thể tạo ra những tình huống giúp học sinh thực hiện chuyển hóa liên tưởng như vậy.

Ví dụ 8: Khi giải bài toán "Cho 9 số tự nhiên đôi một khác nhau. Tổng số của 5 số bất kì lớn hơn tổng của 4 số còn lại cộng với 2012. Chứng minh rằng mỗi số lớn hơn 2016."

Như vậy, từ nội dung bài toán này ta chưa biết nhiều các thông tin về các số đã cho ngoài thông tin tổng của 5 số bất kì lớn hơn tổng của 4 số còn lại cộng với 2012. Với giả thiết các số tự nhiên đã cho, ta tạo lập mối liên tưởng với thông tin liên quan đến số tự nhiên đó là tập sắp thứ tự và giả sử $a_1 < a_2 ...... < a_9$

Khi đó để giải quyết bài toán ta chỉ cần chứng minh $a_1 > 2016$

Khai thác giả thiết đã cho ta có:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + 2012$

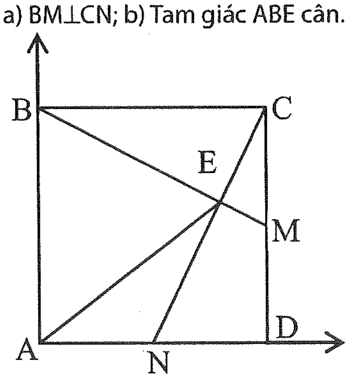
$a_1 > (a_6 - a_2) + (a_7 - a_3) + (a_8 - a_4) + (a_9 - a_5) + 2012$

và suy ra điều cần chứng minh.

Trong nội tại một thứ ngôn ngữ toán học, ta cũng có thể thực hiện việc chuyển hóa liên tưởng từ một loại ngôn ngữ này sang một ngôn ngữ khác.

Ví dụ 9: Khi giải bài toán: Cho hình vuông ABCD có M, N thứ tự là trung điểm của CD, DA. Gọi E là giao điểm của BM và CN. Chứng minh rằng:

a) BM⊥CN; b) Tam giác ABE cân.



Để giải quyết bài toán này, từ những thông tin đã cho ở bài toán như hình vuông, trung điểm, vuông góc... ta có thể giúp học sinh chuyển đến hướng giải quyết theo ngôn ngữ hình học tổng hợp thông thường về giải quyết theo ngôn ngữ hình học tọa độ bằng việc:

Chọn hệ trục tọa độ *xOy* trong đó

O≡A(0,0); B(0,a); D(a,0); C(a,a) với a > 0

Khi đó $M\left(a; \frac{a}{2}\right)$; $N\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ và tiến hành

+ Lập phương trình đường thẳng BM, CN

Tương ứng là $y = -\frac{1}{2}x + a$; $y = 2x - a$

Suy ra BM⊥CN

+ Tìm *{E} = BM ∩ CN* từ việc giải hệ phương trình

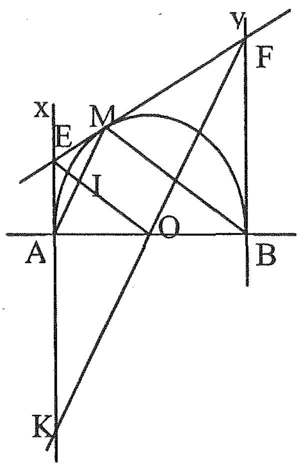
$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + a \\ y = 2x - a \end{cases} \Rightarrow E\left(\dfrac{4a}{5}; \dfrac{3a}{5}\right)$$

Suy ra $AE = a = AB$. Vậy ΔABE cân.

2.4. Tình huống dạy học sử dụng nhiều cách khai thác, nhiều cách biến đổi thông tin toán học khác nhau

Mỗi tri thức toán học có thể diễn đạt bằng nhiều cách khác nhau, tương ứng với mỗi cách diễn đạt đó ta có thể huy động nhiều kiến thức khác nhau, khai thác nhiều khía cạnh khác nhau để giải quyết các vấn đề toán học. Việc khai thác đó thông qua cách giải quyết các tình huống dạy học cụ thể sẽ góp phần bồi dưỡng năng lực BĐTT trong dạy học Toán cho học sinh.

Ví dụ 10: Việc giải bài toán "Cho nửa đường tròn đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax tại A, By tại B. Lấy điểm M trên dây cung AB, tiếp tuyến với nửa đường tròn tại M cắt Ax tại E, By tại F. Chứng minh OE⊥OF".



Dựa vào nhiều kiến thức liên quan đến cách chứng minh hai đường thẳng vuông góc, giáo viên có thể xây dựng các tình huống dạy học phù hợp để khai thác hiệu quả các thông tin đó.

+ Cách 1: Ta biến đổi về sử dụng định lí Pitago đảo trong tam giác OEF;

+ Cách 2: Ta biến đổi về sử dụng tổng 3 góc trong tam giác OEF bằng 180^0;

+ Cách 3: Sử dụng tính chất IM//OF và OE⊥IM $\Rightarrow$ OE⊥OF;

+ Cách 4: Sử dụng tính chất trong tam giác cân phân giác vừa là đường cao và quy về chứng minh tam giác EFK cân.

Như vậy, bằng cách khai thác thông tin từ nhiều khía cạnh ta có thể chọn lọc huy động nhiều kiến thức khác nhau, phù hợp để giải quyết. Thông qua đó, học sinh được bồi dưỡng tốt hơn năng lực BĐTT toán học.

2.5. Tình huống dạy học giúp học sinh tiếp cận với việc phát hiện và khắc phục các sai lầm khi giải toán

Nhiều nhà khoa học đã nhấn mạnh tới vai trò của việc phát hiện và sửa chữa sai lầm cho học sinh trong quá trình dạy học toán. G.Pôlia cho rằng "Con người phải biết học ở những sai lầm và thiếu sót của mình"; A.A Stôlia phát biểu" không được tiếc thời gian để phân tích trên giờ học các sai lầm của học sinh".

Chính vì vậy, cần tạo ra những tình huống dạy học nhằm giúp học sinh nhận ra và biết cách khắc phục sửa chữa các sai lầm trong quá trình học toán, từ đó góp phần bồi dưỡng năng lực BĐTT một cách chính xác.

Có nhiều kiểu sai lầm của học sinh khác nhau thường gặp khi giải toán như sai lầm về tính toán, biến đổi, sai lầm về ngôn ngữ, sai lầm liên quan đến sự phân chia các trường hợp riêng, sai lầm liên quan đến áp dụng quy tắc suy luận, sử dụng các thao tác tư duy... Những sai lầm đó cần được đưa ra và để học sinh phát hiện và tìm cách sửa chữa thông qua các tình huống dạy học phù hợp.

Ví dụ 11: Phát hiện và sửa chữa sai lầm trong lời giải bài toán:

$$(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x \geq 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 3$$

Lời giải: (*)

Như vậy, do không nắm vững các phép biến đổi tương đương nên phép biến đổi đã dẫn đến sai lầm làm mất đi nghiệm x = 2.

Khắc phục:(*)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} = 0 \\ (x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \vee x = -\dfrac{1}{2} \vee x = 2 \\ x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x \geq 3 \end{array}\right.$$

Ví dụ 12: Khi đưa ra tình huống cho học sinh, theo bạn hai lời giải sau của bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x-4| + |2x-5|$ sau là đúng hay sai? Vì sao?

Lời giải 1: *Vì $|t| \geq 0\ \forall\ t \in R$ nên $A \geq 0$. Suy ra $minA = 0$*

Lời giải 2: *Vì $|t| \geq t\ \forall\ t \in R$ nên $A \geq x - 4 + 2x - 5 \Rightarrow A \geq 3x - 9$ (*)*

Đẳng thức xảy ra ở (*) là khi $x \geq 4$ khi đó $3x - 9 \geq 3$

Vậy min A = 3 tại x = 4.

Giáo viên hướng dẫn cho học sinh phân tích cả 2 lời giải trên đều sai vì:

(Xem tiếp trang 40)