PHÂN TÍCH CÁCH GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP GIẢI TÍCH NHẰM GÓP PHẦN BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC GIẢI TOÁN CHO SINH VIÊN

ThS. NGUYỄN THỊ DUNG
Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

Đặt vấn đề

Việc giải toán có vai trò quan trọng trong học tập và trong cuộc sống, đây cũng là phương pháp cơ bản giúp rèn luyện tư duy. Tuy nhiên, nhiều sinh viên còn gặp khó khăn khi giải bài tập Giải tích, một trong những nguyên nhân là do họ chưa phân tích các bước giải một cách hiệu quả. Bài viết này xin được trình bày những gợi ý giúp sinh viên tự phân tích các bước giải, từ đó góp phần bồi dưỡng năng lực giải toán cho người học.

1. Phương pháp chung để giải bài toán

Năng lực giải toán của sinh viên được xác định qua khả năng vận dụng các tri thức toán học, vận dụng các thao tác kĩ thuật và phương pháp giải toán đã được tích lũy để định hướng lời giải, khả năng kết thúc lời giải, trình bày và hoàn thiện lời giải của bài toán.

Trong cuốn sách "Phương pháp dạy học môn Toán", tác giả Nguyễn Bá Kim đã nêu phương pháp chung để giải bài toán như sau:

Bước 1: Tìm hiểu nội dung đề bài

- Tìm hiểu cái đã cho, cái cần tìm hay phải chứng minh;
- Phát biểu đề bài dưới những dạng khác nhau để hiểu rõ nội dung bài toán;
- Có thể dùng các công thức, kí hiệu hay hình vẽ để diễn tả đề bài.

Bước 2: Tìm cách giải

- Tìm tòi, suy đoán để phát hiện cách giải: tìm mối liên hệ giữa cái đã cho với cái cần tìm hay phải chứng minh, biến đổi cái đã cho, biến đổi cái cần tìm, liên tưởng đến một định lí, tính chất hay một bài toán cũ, nghĩ đến trường hợp đặc biệt, trường hợp tổng quát, bài toán phụ, sử dụng các phương pháp chứng minh phù hợp với từng dạng toán như quy nạp, phản chứng,...;
- Kiểm tra lại lời giải: kiểm tra kĩ từng bước giải, xét kết quả trong các trường hợp đặc biệt, xem các yếu tố của giả thiết đã được sử dụng hết chưa,...;
- Tìm thêm các cách giải khác. So sánh chúng để chọn lời giải phù hợp nhất.

Bước 3: Trình bày lời giải

Sắp xếp các nội dung cần trình bày theo thứ tự. Trình bày lời giải một cách ngắn gọn, chính xác,...

Bước 4: Nghiên cứu sâu lời giải

- Có thể xét bài toán tương tự, bài toán đặc biệt hơn, tổng quát hơn;
- Có thể xét ứng dụng của lời giải,...

Việc phân tích cách giải bài toán theo phương pháp chung ở trên sẽ đưa ra những gợi ý về cách suy nghĩ để tìm lời giải, từ đó góp phần bồi dưỡng năng lực giải toán cho sinh viên.

2. Một số ví dụ về phân tích cách giải bài tập Giải tích góp phần nâng cao năng lực giải toán cho sinh viên

Để giải được các bài tập Giải tích, sinh viên cần phải hiểu rõ và biết vận dụng những định nghĩa, định lí, phải nghiên cứu sâu bài toán, rút ra những kết quả đáng nhớ và liên hệ với các bài toán khác, tìm nhiều cách giải khác nhau để có thể rèn luyện tư duy sáng tạo,... Trong phần này, chúng ta sẽ phân tích cách giải một vài bài toán như vậy.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng mỗi đa thức bậc lẻ với hệ số thực có ít nhất một nghiệm thực.

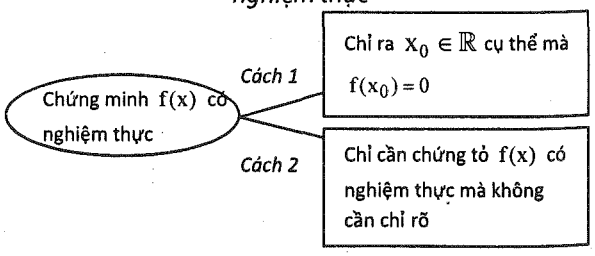
Bước 1: Tìm hiểu đề bài

- Cho $f(x)$ là một đa thức bậc lẻ bất kì với hệ số thực;
- Chứng minh $f(x)$ có ít nhất một nghiệm thực.

Bước 2: Tìm cách giải

Giả sử $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ $(a_n \neq 0, n$ lẻ)

Hình 1: Cách giải về việc chứng minh f(x) có nghiệm thực



Cách 1 khó vì chưa có cách giải chung cho mọi đa thức.

Xét cách 2, ta liên tưởng đến định lí sau: "Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$."

Nhận thấy hàm đa thức liên tục tại mọi điểm, tuy nhiên khó chỉ ra các số a, b cụ thể để $f(a).f(b) < 0$

, vậy có thể ước lượng giá trị của $f(x)$ dựa vào giới hạn không?

Có $f(x) \sim a_n x^n$ khi $x \to +\infty$ (hoặc $x \to -\infty$)

Nếu $a_n > 0$

thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Như vậy, tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha < \beta)$

mà $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$.

Hàm số f liên tục trên $[\alpha, \beta]$ và $f(\alpha).f(\beta) < 0$, suy ra tồn tại $c \in (\alpha, \beta)$ sao cho $f(c) = 0$. Số c chính là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Nếu $a_n < 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, khi đó tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha < \beta)$ mà $f(\alpha) > 0$, $f(\beta) < 0$. Suy ra $f(x)$ cũng có nghiệm thực.

Kiểm tra lại từng bước lập luận trên, ta thấy cách giải vừa tìm là đúng.

Bước 3: Trình bày lời giải

Gọi $f(x)$ là đa thức bậc lẻ bất kì với hệ số thực.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \quad (\text{n lẻ, } a_n \neq 0).$$

Giả sử $a_n > 0$ (trường hợp $a_n < 0$ thì hoàn toàn tương tự)

Có

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Như vậy, tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha < \beta)$

mà $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$ và $f(\alpha).f(\beta) < 0$, suy ra tồn tại $c \in (\alpha, \beta)$ sao cho $f(c) = 0$. Số c chính là nghiệm của đa thức $f(x)$

Vậy mỗi đa thức bậc lẻ với hệ số thực có ít nhất một nghiệm thực.

Bước 4: Nghiên cứu sâu lời giải

Bằng suy nghĩ tương tự ở ví dụ trên, ta muốn tìm xem liệu còn bài toán nào khác về mối liên hệ giữa bậc của đa thức với số nghiệm của đa thức nữa không? Từ đó, ta có một vài kết quả sau :

1. Nếu $f(x)$ là đa thức bậc lẻ (với hệ số thực) thì số nghiệm thực của $f(x)$ à số lẻ;

2. Nếu $f(x)$ là đa thức bậc chẵn (với hệ số thực) thì số nghiệm thực của $f(x)$ là số chẵn (số nghiệm có thể là 0).

(Chú ý: Ở các ví dụ trong bài viết này, khi nói về số nghiệm, ta hiểu là mỗi nghiệm được kể một số lần bằng số bội của nó)

*) Trong nhiều trường hợp, việc nghiên cứu sâu lời giải, đưa ra các kết quả mới và ghi nhớ chúng sẽ giúp ta giải quyết dễ dàng hơn những bài toán liên quan. Tuy nhiên, nhiều sinh viên đã bỏ qua bước này, họ cố gắng nhớ các định nghĩa, định lí nhưng lại không nhớ những kết quả quan trọng từ các bài tập đã giải.

Ví dụ 2: Cho đa thức với hệ số thực $P(x)$ bậc n ($n \geq 1$) có m nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = x^2P(x) + P'(x)$ có ít nhất m nghiệm thực.

Bước 1: Tìm hiểu đề bài

- Cho đa thức $P(x)$ bậc n ($n \geq 1$) có m nghiệm thực, $Q(x) = x^2P(x) + P'(x)$

- Cần chứng minh $Q(x)$ có ít nhất m nghiệm thực.

Bước 2: Tìm cách giải

Có mối liên hệ nào giữa $P(x)$ và $Q(x)$ không? $Q(x)$ có thể là đạo hàm của hàm số nào?

Nhận thấy $\left[e^{\frac{x^3}{3}} P(x)\right]' = e^{\frac{x^3}{3}}\left[x^2P(x) + P'(x)\right]$.

Đặt $e^{\frac{x^3}{3}} P(x) = f(x)$.

Số nghiệm của $f(x)$ chính là số nghiệm của $P(x)$ và số nghiệm của $Q(x)$ là số nghiệm của $f'(x)$.

Cần tìm mối liên hệ giữa số nghiệm của $f(x)$ và số nghiệm của $f'(x)$ nên ta liên tưởng đến định lí Rolle.

Nếu $f(x)$ có m nghiệm thực phân biệt thì dễ dàng suy ra $f'(x)$ có ít nhất $m-1$ nghiệm thực phân biệt. Trường hợp có x_k là nghiệm bội l_k của $f(x)$ thì suy ra x_k là nghiệm bội $l_k - 1$ của $f'(x)$. Như vậy, trong mọi trường hợp, $f'(x)$ luôn có ít nhất $m-1$ nghiệm thực. Vậy $Q(x)$ có ít nhất $m-1$ nghiệm thực. Nhìn lại giả thiết của bài toán, $P(x)$ là đa thức

bậc n, ta nghĩ đến mối liên hệ giữa số nghiệm thực của đa thức với bậc của đa thức và nhớ lại bài toán suy ra từ ví dụ 1.

Giả sử n lẻ, khi đó m lẻ và $m-1$ chẵn, $Q(x)$ là đa thức bậc lẻ nên có số nghiệm thực là số lẻ.Vậy số nghiệm thực của $Q(x)$ phải lớn hơn hoặc bằng m.

Tương tự, nếu n chẵn, suy ra m chẵn và $m-1$ lẻ, $Q(x)$ là đa thức bậc chẵn nên có số nghiệm thực là số chẵn.Vậy số nghiệm thực của $Q(x)$ phải lớn hơn hoặc bằng m.

Kiểm tra lại các bước lập luận, ta thấy cách giải trên là đúng.

Bước 3: Trình bày lời giải

Nhận thấy $\left[e^{\frac{x^3}{3}}P(x)\right]' = e^{\frac{x^3}{3}}\left[x^2P(x)+P'(x)\right]$.

Đặt $e^{\frac{x^3}{3}}P(x) = f(x)$.

$f(x)$ có m nghiệm thực.

Nếu $f(x)$ có m nghiệm thực phân biệt thì theo định lí Rolle, $f'(x)$ có ít nhất $m-1$ nghiệm thực phân biệt. Trường hợp có x_k là nghiệm bội l_k của $f(x)$ thì suy ra x_k là nghiệm bội l_k-1 của $f'(x)$. Như vậy trong mọi trường hợp, $f'(x)$ luôn có ít nhất $m-1$ nghiệm thực, do đó $Q(x)$ có ít nhất $m-1$ nghiệm thực.

Giả sử n lẻ, khi đó m lẻ và $m-1$ chẵn, $Q(x)$ là đa thức bậc lẻ nên có một số lẻ nghiệm thực, suy ra số nghiệm thực của $Q(x)$ lớn hơn hoặc bằng m.

Tương tự, nếu n chẵn, suy ra m chẵn và $m-1$ lẻ, $Q(x)$ là đa thức bậc chẵn nên có số nghiệm thực là số chẵn, suy ra số nghiệm thực của $Q(x)$ lớn hơn hoặc bằng m.

Vậy $Q(x)$ có ít nhất m nghiệm thực.

Bước 4: Nghiên cứu sâu lời giải

1. Có thể suy ra bài toán tổng quát hơn như sau:

Cho đa thức với hệ số thực $P(x)$ bậc n ($n \geq 1$) có m nghiệm thực, $u(x) \neq 0$ là đa thức bậc chẵn. Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = u(x)P(x) + P'(x)$ có ít nhất m nghiệm thực.

2. Bằng cách xét các hàm $f(x)$ dạng khác, ta sẽ có nhiều bài toán tương tự (chẳng hạn khi lấy $f(x) = xP(x)$, ta chứng minh được rằng đa thức $P(x) + xP'(x)$ có ít nhất m nghiệm thực).

*) Các kết quả đưa ra trong bước 4 thường được dựa trên các thao tác tư duy: khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự hóa ,...

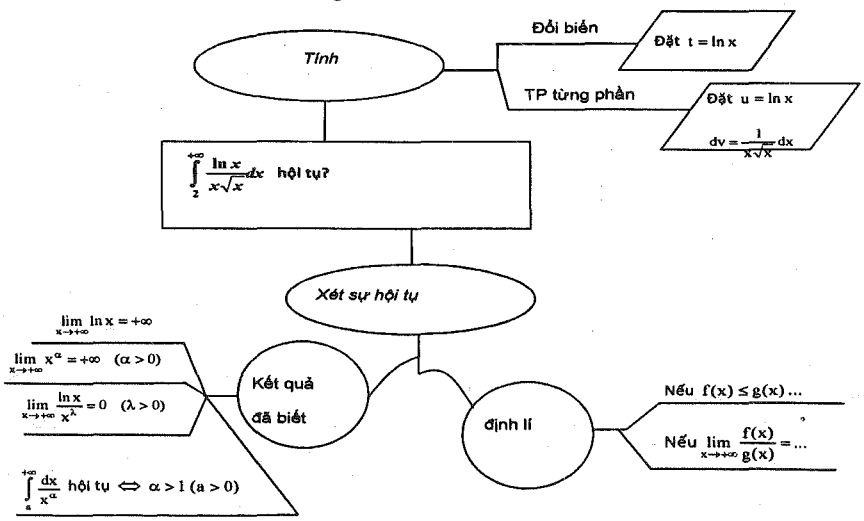
Ví dụ 3: Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng sau: $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx$.

Bước 1: Tìm hiểu đề bài

Ta cần xét xem $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx$ hội tụ hay phân kì.

Bước 2: Tìm cách giải

Hình 2: Cách giải bài xét hội tụ của tích phân



Khi xét sự hội tụ bằng cách dùng các định lí, ta nghĩ:

Liệu có thể chọn một số α nào đó mà $1<\alpha<\frac{3}{2}$ để $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}:\frac{1}{x^{\alpha}}\right)=0$ và $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ hội tụ hay không? (chẳng hạn $\alpha=\frac{5}{4}$)

Có thể chọn hàm $g(x)$ nào mà $\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\le g(x)$ với x đủ lớn và $\int\limits_2^{+\infty}g(x)dx$ hội tụ hay không? (chẳng hạn

$$g(x)=\frac{\sqrt[4]{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}})$$

Từ bản đồ tư duy trên, có thể tìm được 4 cách giải. Kiểm tra lại các bước, ta thấy 4 cách đều đúng.

Bước 3: Trình bày lời giải

Cách 1: Đặt $t=\ln x\Rightarrow x=e^t,\ dx=e^t dt$.

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx=\int\limits_{\ln 2}^{+\infty}te^{-\frac{t}{2}}dt=\int\limits_{\ln 2}^{+\infty}td(-2e^{-\frac{t}{2}})$$

$$=-2te^{-\frac{t}{2}}\Big|_{\ln 2}^{+\infty}+2\int\limits_{\ln 2}^{+\infty}e^{-\frac{t}{2}}dt=$$

$$=\left(-2te^{-\frac{t}{2}}-4e^{-\frac{t}{2}}\right)\Big|_{\ln 2}^{+\infty}=\sqrt{2}(\ln 2+2)\in\mathbb{R}$$

Vậy tích phân đã cho hội tụ.

Cách 2:

Đặt $u=\ln x,\ dv=\frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

$$\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx,\ v=-2\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx=-2\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\Big|_2^{+\infty}+2\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx.$$

$$=-2\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\Big|_2^{+\infty}-\frac{4}{\sqrt{x}}\Big|_2^{+\infty}==\sqrt{2}(\ln 2+2)\in\mathbb{R}$$

Vậy tích phân đã cho hội tụ.

Cách 3:

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt[4]{x}}=0$ nên

$\ln x<\sqrt[4]{x}$ với x đủ lớn $\Rightarrow\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}<\frac{\sqrt[4]{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$

với x đủ lớn. Do $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{5}{4}}}$ hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ.

Cách 4: Có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}:\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt[4]{x}}=0$$

và $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{5}{4}}}$ hội tụ. Vậy tích phân đã cho hội tụ.

Bước 4: Nghiên cứu sâu lời giải

Dựa vào suy luận từ các cách giải trên, ta thấy $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}dx$ hội tụ nếu $\alpha>1$, phân kì nếu $\alpha\le 1$ $(\alpha,a\in\mathbb{R},\ a>0)$.

*) Việc tìm tòi nhiều cách giải, kiểm tra và chọn cách giải phù hợp là một trong những phương pháp hiệu quả giúp rèn luyện tư duy sáng tạo, tư duy phản biện, hướng tới bồi dưỡng năng lực giải toán.

Kết luận

Việc giải mỗi bài toán đòi hỏi người học phải nắm vững kiến thức cơ bản, biết suy đoán và sáng tạo, biết nhớ và vận dụng các bài toán cũ có liên quan, thường xuyên thực hành, ôn luyện,... Đối với những bài toán khó, khi tham khảo lời giải có sẵn, sinh viên cũng phải tự phân tích các bước giải để hiểu rõ tại sao cách giải là như vậy, từ đó sẽ nhớ lâu và biết cách vận dụng khi gặp trường hợp tương tự.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Bá Kim (2007), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm.

2. G.Pôlya (1975), *Giải một bài toán như thế*

(Xem tiếp trang 36)