

SỬ DỤNG TOÁN HỌC HÓA ĐỂ NÂNG CAO HIỂU BIẾT ĐỊNH LƯỢNG CHO HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

• PGS.TS. TRẦN VUI

Trường Đại học Sư phạm – Đại học Huế

1. Giới thiệu

Các mục đích của toán học nhà trường có vẻ như được chuyển đổi theo từng thập niên, từ việc hiểu khái niệm trong toán học vào những năm 60 đến các kĩ năng cơ bản có xu hướng trở lại với cơ bản vào những năm 70, từ giải quyết vấn đề trong những năm 80 thực dụng đến năng lực toán học trong các chuẩn tiêu chuẩn được tạo cảm hứng vào những năm 90. Phải chăng suy luận toán học sẽ là tiếp theo? Không có vẻ như vậy. Theo nghĩa chặt chẽ của nó, suy luận toán học khó có thể đủ để ủng hộ các mục đích công chúng của toán học nhà trường. Mọi người đều cần đến thực hành toán học. Nhưng ai thực sự cần hiểu toán? Ai thực sự cần suy luận toán học? Liệu người ta có thể tạo ra được một trường hợp mà mọi học sinh tốt nghiệp trung học phổ thông cần có khả năng tư duy toán học hơn là chỉ thể hiện một cách toán học không? ([4] Steen, 1999). Theo hiểu biết của tôi, bước sang những năm đầu của thế kỷ 21, xu hướng thực hành áp dụng toán học vào hầu hết các vấn đề mà học sinh gặp phải trong cuộc sống đời thường được nhiều nhà giáo dục quan tâm nghiên cứu trên toàn cầu. Việc áp dụng đó được tiếp cận theo nhiều cách khác nhau, và sử dụng các thuật ngữ khác nhau để mô tả.

Trong những tình huống thông thường, con người vận dụng toán học theo hai cách khác nhau: bằng cách sử dụng các công thức hay quy trình đã biết để giải các bài toán mẫu mực hay bằng cách đối mặt với các vấn đề phức tạp thông qua các phương án toán học tiêu biểu (chẳng hạn như chuyển sang một cấu trúc mới bằng phép ngoại suy; tìm kiếm các quy luật phép quy nạp; suy luận bằng tương tự hóa; tổng quát hóa và đặc biệt hóa; khám phá các trường hợp đặc thù; trừu tượng lên để lược bỏ những chi tiết không cần thiết). Rất hiếm khi con người

tham gia vào suy diễn chính xác, nó đặc trưng cho toán học hình thức. Ở nơi làm việc và ở nhà, những tính toán nhiều bước một cách tinh tế dựa trên toán học có cơ sở đo đạc bằng số cụ thể và nói chung nó khác rất xa với các chuỗi suy luận lôgic dẫn đến chứng minh toán học ([2], Forman & Steen, 1995). Những vận dụng toán học trong những tình huống thực tế thông thường như vậy được chương trình đánh giá học sinh quốc tế có tên viết tắt là PISA (Programme for International Student Assessment) của tổ chức hợp tác và phát triển kinh tế có tên viết tắt là OECD (Organization for Economic Co-operation and Development) quan tâm nghiên cứu từ năm 2000.

Trong bài báo này, tôi sẽ dùng theo một nghĩa tương đương các thuật ngữ được sử dụng để chỉ *hiểu biết định lượng* ở trên thế giới: hiểu biết định lượng hay *suy luận định lượng* ở Mỹ, *toán học thiết thực* gần đây ở Anh, và *hiểu biết toán* ở hầu hết các nơi khác. Hiện nay, kì thi cuối khóa để đo lường khả năng suy luận định lượng viết tắt là QRT (Quantitative Reasoning Test) là bắt buộc đối với hầu hết các sinh viên sắp tốt nghiệp, cũng như đối với học viên sau đại học ở các nước trên thế giới. Điều đó chứng tỏ rằng suy luận định lượng đóng một vai trò quan trọng trong hệ thống giáo dục hiện nay và cần phải được đầu tư nghiên cứu và phát triển trong môi trường toán học nhà trường.

Ví dụ minh họa được sử dụng trong bài báo này được trích dẫn từ nghiên cứu của tác giả về thăm dò hiểu biết đại số của học sinh 15 tuổi ở tỉnh Thừa Thiên Huế ([4] Vui, 2008).

2. Hiểu biết định lượng

PISA ([3], OECD, 2003), tổ chức đại diện cho một sự nhất trí quốc tế, định nghĩa hiểu biết định lượng như sau:



Hiểu biết toán là khả năng của một cá nhân để xác định và hiểu vai trò của toán học trong cuộc sống, để đưa ra những phán xét có cơ sở, để sử dụng và gắn kết toán học theo các cách đáp ứng nhu cầu của cuộc sống của cá nhân đó với tư cách là một công dân có tính xây dựng, biết quan tâm và biết phản ánh.

Hiểu biết định lượng là tư duy với toán học về các vấn đề trong cuộc sống hằng ngày. Tuy nhiên, những mô tả bằng lời như vậy bản thân chúng đã là mơ hồ, dễ bị lí giải lại theo thuật ngữ kinh nghiệm của chính từng mỗi người. Thuật ngữ hiểu biết toán được chọn để nhấn mạnh kiến thức toán được đặt vào việc sử dụng có tính vận hành trong vô vàn tình huống thực tế khác nhau theo các cách thay đổi, phản ánh và sâu sắc. Dĩ nhiên để những việc sử dụng như vậy là có thể phát triển được, nhiều kiến thức và kĩ năng toán học nên tảng được cần đến, và những kĩ năng như vậy tạo thành một phần của định nghĩa của chúng ta về hiểu biết toán.

Ví dụ, hiểu biết định lượng có thể cho học sinh một hiểu biết tốt hơn về sự khác nhau giữa sự thay đổi và các tỉ lệ thay đổi, dẫn đến một nắm bắt có tính khái niệm tốt hơn về sự khác biệt giữa vận tốc và gia tốc. Ngoài ra hiểu biết định lượng có thể rèn luyện tốt các kĩ năng suy luận tỉ lệ cho học sinh, dẫn đến một nắm bắt tốt hơn về mật độ. Nhiều học sinh phải vật lộn để hiểu các sự khác biệt giữa mật độ độ dài, mật độ diện tích, mật độ thể tích, thường sử dụng ba đại lượng này một cách có thể thay thế cho nhau. Việc học sinh không có khả năng để xây dựng một mô hình có tính khái niệm cho những ý tưởng này được phản ánh qua những khó khăn của các em trong việc hiểu và áp dụng những nguyên tắc liên quan.

Để nâng cao khả năng hiểu biết định lượng cho học sinh, các nhà giáo dục toán đã dùng đến quy trình *toán học hóa*. Những bước của quá trình toán học hóa được thảo luận trong cơ cấu này là những thành phần cơ bản của việc dùng toán trong những tình huống thực tế gắn gũi với cuộc sống hằng ngày.

3. Toán học hóa

Để dễ hình dung khái niệm toán học hóa

một cách cụ thể, chúng ta xem xét một ví dụ có thể nảy sinh trong cuộc sống sau đây.

Ví dụ: Đèn đường ([3], OECD, 2003)

Hội đồng thành phố quyết định dựng một cây đèn đường trong một công viên nhỏ hình tam giác sao cho nó chiếu sáng toàn bộ công viên. Người ta nên đặt nó ở đâu?

Vấn đề mang tính xã hội này có thể được giải quyết bằng phương án chung được sử dụng bởi các nhà toán học sau đây, mà cơ sở toán học sẽ xem như là toán học hóa.

Toán học hóa có thể được đặc trưng qua năm khía cạnh sau đây:

1. Bắt đầu bằng một vấn đề có tính hướng thực tế;

Đặt cây đèn đường ở chỗ nào trong công viên.

2. Tổ chức vấn đề theo các khái niệm toán học;

Công viên có thể được thể hiện như là một tam giác, và việc chiếu sáng từ một cây đèn như là một hình tròn mà cây đèn là tâm của nó.

3. Không ngừng cắt tĩa để thoát dần ra khỏi thực tế thông qua các quá trình như đặt giả thiết về các yếu tố quan trọng của vấn đề, tổng quát hóa và hình thức hóa (nó coi trọng các yếu tố toán học của tình huống và chuyển thể vấn đề thực tế sang bài toán đại diện trung thực cho tình huống);

Vấn đề được chuyển thành việc xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

4. Giải quyết bài toán;

Dùng kiến thức tâm của một đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm các đường trung trực của các cạnh tam giác, dựng hai đường trung trực của hai cạnh tam giác. Giao điểm của hai đường trung trực là tâm của đường tròn.

5. Làm cho lời giải của bài toán là có ý nghĩa đối với tình huống thực tế.

Liên hệ kết quả này với công viên thực tế. Phản ánh về lời giải và nhận ra rằng nếu một trong ba góc của công viên là tù, thì lời giải này sẽ không hợp lý vì cây đèn sẽ nằm ra ngoài công viên. Nhận ra rằng vị trí, và kích thước của các cây xanh trong công viên là những yếu tố khác ảnh hưởng đến tính hữu ích của lời giải toán học.

Những quá trình toán học hóa theo một

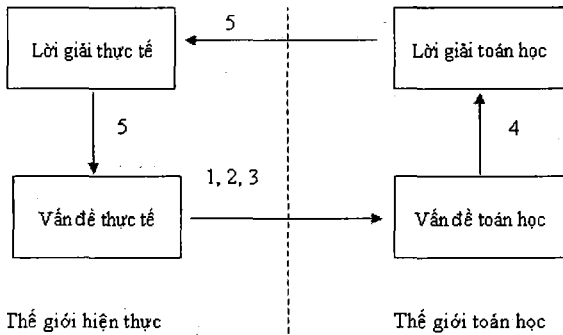
nghĩa rộng là đặc trưng cho việc các nhà toán học thường làm toán như thế nào, con người sử dụng toán học như thế nào trong nhiều nghề nghiệp chính hiện nay, và những công dân có hiểu biết và biết phản ánh nên dùng toán học để tham gia một cách hoàn toàn và có năng lực vào thế giới thực tế. Thực ra, học để toán học hóa nên là mục đích giáo dục đầu tiên cho tất cả học sinh.

Quy trình toán học hóa có 5 bước dựa trên cơ sở lí thuyết của khuôn khổ toán học OECD/PISA:

- (1) Bắt đầu từ một vấn đề được đặt ra trong thực tế;
- (2) Tổ chức theo các khái niệm toán học;
- (3) Không ngừng cắt tĩa thực tế;
- (4) Giải quyết bài toán;
- (5) Làm cho lời giải toán có ý nghĩa theo bối cảnh thực tế.

Quy trình đó được chỉ ra ở sơ đồ sau ([3] OECD, 2003):

Sơ đồ: Quy trình toán học hóa



Một khi học sinh đã chuyển thể được vấn đề thành một dạng toán, toàn bộ quá trình có thể tiếp tục trong toán học. Các em sẽ nỗ lực làm việc trên mô hình của mình về bối cảnh vấn đề, để điều chỉnh nó, để thiết lập các quy tắc, để xác định các nối kết và để sáng tạo nên một lập luận toán học đúng đắn.

4. Ví dụ minh họa

Ví dụ về mối liên hệ giữa kĩ năng đại số và hiểu biết định lượng thông qua một nội dung về phương trình bậc nhất. Hai câu hỏi sau đây được thiết kế mô phỏng theo câu hỏi đánh giá hiểu biết toán của PISA ([3], OECD, 2003),

nhằm để thăm dò mức độ hiểu biết đại số của học sinh lớp 10.

4.1. Ví dụ 1: Câu hỏi 1 về Kĩ năng đại số

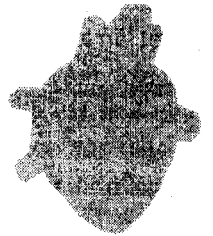
- 1(a) (i) Rút gọn biểu thức $580-x-(500-0,6x)$
 (ii) Giải phương trình $580-x-(500-0,6x) = 0$
- 1(b) Cho phương trình $y=500-0,6x$
 (i) tìm giá trị y của khi $x=6$
 (ii) giá trị của y thay đổi như thế nào khi x tăng lên 1?

Đối với học sinh lớp 10 khi đã học ở giữa học kỳ II, thì các câu hỏi về kĩ năng đại số này là khá quen thuộc và không khó khăn đối với phần lớn các em. Chỉ riêng câu 1(b) (ii), nhiều học sinh hơi lúng túng vì không xác định được là x tăng lên 1 ở thời điểm nào. Và kết quả là y giảm xuống 0.6 khi x tăng lên 1.

4.2. Ví dụ 2: Câu hỏi 2 về Nhịp tim

Vì những lí do sức khỏe người ta nên giới hạn những nỗ lực của mình, chẳng hạn như trong thể thao, để khỏi phải vượt quá một tần suất nhịp tim nào đó.

Trong nhiều năm mối quan hệ giữa nhịp tim tối đa được khuyến cáo của một người và độ tuổi của người đó được mô tả bằng công thức sau đây:



Nhịp tim tối đa được khuyến cáo = 220 - tuổi

Nghiên cứu gần đây đã chỉ ra rằng công thức này nên được mô phỏng đi một ít. Công thức mới như sau: Nhịp tim tối đa được khuyến cáo = 208 - (0,7 x tuổi)

a) Hoàn thiện bảng sau về nhịp tim tối đa được khuyến cáo:

Tuổi (theo năm)	9	12	15	18	21	24
Nhịp tim tối đa được khuyến cáo cũ (công thức cũ)	211	208	205	202	199	196
Nhịp tim tối đa được khuyến cáo mới (công thức mới)	201,7		197,5	195,4		191,2



b) Bạn Hoa chú ý rằng hiệu số của hai nhịp tim tối đa được khuyến cáo trong bảng có vẻ giảm đi khi tuổi tăng lên.

Tim và rút gọn một công thức cho hiệu số này theo tuổi.

c) Ở tuổi nào thì công thức cũ và mới cho chính xác cùng một giá trị?

d) Công thức mới đã làm thay đổi nhịp tim khuyến cáo tối đa theo độ tuổi như thế nào? Hãy giải thích câu trả lời của bạn một cách rõ ràng.

Nghiên cứu chỉ ra rằng tập thể dục có hiệu quả nhất khi nhịp tim là 80% của nhịp tim tối đa được khuyến cáo theo công thức mới.

e) Hãy viết ra và rút gọn công thức cho nhịp tim hiệu quả nhất để tập thể dục theo tuổi.

f) Đối với một người cụ thể, nhịp tim hiệu quả nhất để tập thể dục sẽ thay đổi như thế nào khi người đó tăng lên một tuổi?

Câu hỏi 2 được đặt trong một tình huống thực tế. Học sinh phải hiểu được tình huống, chuyển những thông tin thành các phương trình đại số, biết vận dụng các kĩ năng đại số để giải quyết lần lượt các vấn đề đặt ra. Đối với câu 2(d), học sinh thấy được ba khả năng có thể xảy ra: (i) thấp hơn khi dưới 40 tuổi (ii) bằng nhau khi 40 tuổi (iii) cao hơn khi trên 40 tuổi. Học sinh có thể dùng đồ thị của hai hàm số $y = 220 - x$ và $y = 208 - 0,7x$ để tìm thấy sự thay đổi. Qua câu hỏi này học sinh thực sự có dịp vận dụng các kĩ năng đại số thông qua toán học hóa để nâng cao hiểu biết định lượng của mình.

Khi so sánh đối chiếu kết quả bài làm của học sinh ở cả hai câu hỏi trong 2 ví dụ trên, ta sẽ rất ngạc nhiên là phần lớn học sinh thành thạo các kĩ năng đại số ở câu 1, đã không thành công khi chuyển thể các thông tin bằng lời của ở câu hỏi 2 trong quá trình toán học hóa. Học sinh của chúng ta đã quá quen với việc giải các phương trình đại số một cách thành thạo mà không quen thực hành áp dụng chúng trong việc giải quyết các vấn đề thực tế hằng ngày.

5. Kết luận

Để xác định suy luận định lượng hay hiểu biết định lượng là gì và làm thế nào để đo lường nó là một vấn đề chính yếu của nội dung giáo

dục ở nhiều quốc gia. Chương trình đánh giá học sinh quốc tế PISA là một đóng góp gần gũi nhất hiện đang có trên thế giới đối với việc đo lường hiểu biết định lượng của học sinh mười lăm tuổi. Đánh giá toán PISA mong muốn tìm kiếm học sinh 15 tuổi cần có những hiểu biết toán học nào để chuẩn bị cho cuộc sống trưởng thành mà các em sắp sửa bước vào. Những kết quả của bài báo là một nỗ lực vận dụng những kết quả nghiên cứu của PISA trong những năm gần đây về việc sử dụng toán học hóa để nâng cao hiểu biết định lượng vào bối cảnh giáo dục toán của Việt Nam.

Lời cảm ơn

Chúng tôi tỏ lòng cảm ơn đến GS. Max Stephen, nhà giáo dục toán người Úc về những trao đổi thú vị liên quan đến hiểu biết toán của học sinh Việt Nam, trong dịp hội nghị khu vực Châu Á Thái Bình Dương về nghiên cứu bài học toán, diễn ra ở Đại học Khon Kaen, Thái Lan, 24-31 tháng 8 năm 2008.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Forman, Susan L. and Lynn Arthur Steen. *Mathematics for Life and Work. In Prospects for School Mathematics*, edited by Iris M. Carl, pp. 219-241. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1995.
2. OECD. *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, OECD, Paris, France, 2003.
3. Steen Lynn Arthur. *Twenty questions about mathematical reasoning*. NCTM's 1999 Yearbook: Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12. Lee Stiff, Editor, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1999, pp. 270-285.
4. Trần Vui. *Đánh giá hiểu biết toán của học sinh 15 tuổi*. Tài liệu tham khảo cho học viên Sau đại học. Trường Đại học Sư phạm – Đại học Huế, 9/2008.

SUMMARY

There is an international movement related to quantitative of literacy. To determine what quantitative literacy is and how to measure it is a major national issue. The mathematization is considered as an effective model to enhance the students quantitative reasoning.