

# SỬ DỤNG PHẦN MỀM GEOGEBRA HỖ TRỢ DẠY HỌC QUỸ TÍCH Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

**TS. TRẦN TRUNG**  
Ủy ban Dân tộc Chính phủ

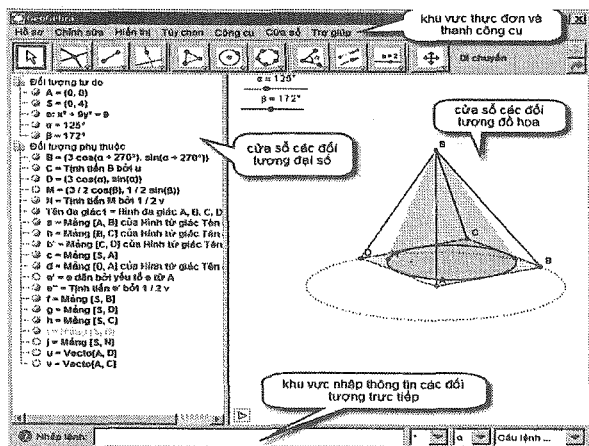
## 1. Đặt vấn đề

Geogebra là phần mềm toán học được sử dụng miễn phí trên thế giới và có cả giao diện tiếng Việt. Phần mềm là sự kết hợp giữa môi trường hình học động, thao tác tính toán với các biểu thức đại số, giải tích và bảng tính điện tử trong mặt phẳng tọa độ. Sau khi cài đặt, người dùng có thể lựa chọn một trong hơn 40 loại ngôn ngữ phù hợp cần sử dụng. Phần mềm Geogebra không chỉ là phần mềm hình học động tương tự như nhiều phần mềm khác như Cabri hay Sketchpad mà phần mềm Geogebra là phần mềm hình học động, đại số động và tính toán động. Ngoài ra Geogebra còn là phần mềm có khả năng tương tác cao: Người sử dụng có thể dựng các điểm, vectơ, đoạn thẳng, đường thẳng, đường conic cũng như có thể làm việc với các hàm số và biểu thức tọa độ của nó. Các phương trình đại số và tọa độ của điểm có thể nhập vào một cách trực tiếp nên Geogebra có khả năng xử lý các bài toán liên quan đến biến số, vectơ và điểm. Vấn đề tính đạo hàm hay tích phân cũng được xử lý bằng các câu lệnh đơn giản.

## 2. Cách sử dụng phần mềm Geogebra hỗ trợ dạy học quỹ tích ở trường phổ thông

Giao diện làm việc của Geogebra gồm cửa sổ hình học và cửa sổ đại số được chia thành 4 phần như sau:

Hình 1: Giao diện làm việc của Geogebra



Làm việc với khu vực thực đơn và thanh công cụ tương tự như phần mềm hình học động khác mà giáo viên đã quen thuộc như Sketchpad, Cabri. Ngoài ra tại cửa sổ Đại số, giáo viên có thể quan sát, điều






khiến các đối tượng này một cách độc lập. Tại khu vực nhập thông tin các đối tượng trực tiếp, giáo viên có thể nhập tọa độ các điểm, phương trình đường thẳng, phương trình đường tròn, giao điểm giữa các đối tượng...

Khác với Cabri hay Sketchpad, Geogebra cho phép chèn các đối tượng ảnh ngay trên màn hình. Chức năng này làm cho phần không gian vẽ hình của phần mềm trở nên rất linh hoạt, tạo ra nhiều hình vẽ đa dạng phù hợp với nhu cầu khác nhau của người sử dụng. Geogebra còn có chức năng lập hồ sơ việc dựng hình tại thẻ "Hiển thị" với mục "Cách dựng hình" cho phép quan sát toàn bộ quá trình thiết kế và xây dựng các đối tượng của hình theo thứ tự, liệt kê các lệnh đã được thực hiện cho đến thời điểm hiện thời. Đồng thời, cho phép định nghĩa lại hoặc điều chỉnh các lệnh đã thực hiện.

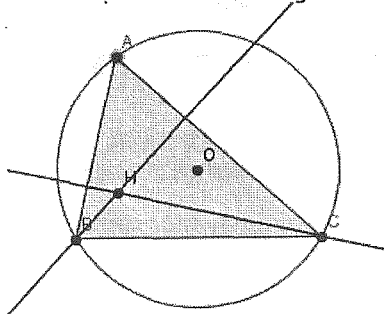
Sau đây là một số ví dụ khai thác Geogebra trong dạy học quỹ tích ở trường phổ thông:

*Ví dụ 1: Khai thác Geogebra trong khâu dự đoán quỹ tích:* Cho đường tròn tâm O, các điểm B, C cho trước nằm trên đường tròn, điểm A di động trên đường tròn. Tìm tập hợp điểm H là trực tâm của tam giác ABC.

Các thao tác vẽ hình trên Geogebra như sau:

- Chọn  **Compa** để vẽ đường tròn;
- Chọn  **Điểm thuộc đối tượng** để xác định A, B, C;
- Chọn  **Đa giác** để vẽ tam giác ABC trên đường tròn;
- Chọn  **Đường vuông góc** để dựng các đường cao của tam giác;
- Chọn  **Giao điểm của 2 đối tượng** để xác định giao điểm của hai đường cao;
- Bấm chuột phải vào các điểm để đặt lại tên cho thích hợp và chọn "thuộc tính" của điểm, ở đây ta chọn thuộc tính "cố định đối tượng" cho điểm B và C khi đó ta thu được hình vẽ như sau:

Hình 2: Trục tâm H của tam giác ABC



Sau khi vẽ hình xong, giáo viên di chuyển điểm A đến các vị trí đặc biệt trùng với B và trùng với C, khi đó học sinh có thể quan sát sự thay đổi của điểm H bằng trực giác để dự đoán được quỹ tích H là cung tròn.

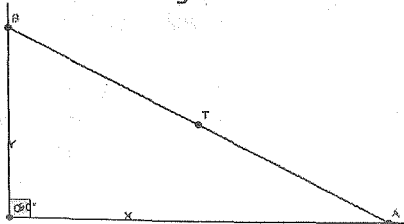
**Ví dụ 2: Sử dụng Geogebra hỗ trợ tìm hướng chứng minh quỹ tích:** Cho góc hai tia Ox và Oy vuông góc với nhau, điểm B cố định trên tia Oy, điểm A di động trên Ox. Tìm quỹ tích trung điểm T của AB.

Thao tác vẽ hình trên Geogebra như sau:

- Chọn Điểm mới để xác định 2 điểm bất kì;
- Chọn Góc với độ lớn cho trước để tạo góc 90 độ từ hai điểm trên. sẽ thu được điểm thứ 3;
- Chọn Tia đi qua 2 điểm vẽ 2 tia vuông góc với nhau từ 3 điểm vừa thu được;
- Chọn phải chuột tại các điểm và các tia để đặt lại tên theo đề bài;
- Chọn Điểm thuộc đối tượng tạo 1 điểm trên Ox, tạo 1 điểm trên Oy;
- Bấm phải chuột tại điểm B trên Oy và chọn thuộc tính cố định đối tượng;
- chọn Đoạn thẳng vẽ đoạn thẳng AB;
- chọn Trung điểm hoặc tâm Lấy trung điểm của AB và đặt tên lại là T.

Khi đó, thu được hình vẽ như sau:

Hình 3: Trung điểm T của AB



Trong thực tế, rất nhiều học sinh ngộ nhận rằng: “Điểm B cố định nên BT luôn bằng AB/2 do đó quỹ tích điểm T sẽ là đường tròn tâm B bán kính AB/2”. Nhưng với phần mềm Geogebra, giáo viên có thể hướng dẫn học sinh tìm quỹ tích và hướng chứng minh quỹ tích bằng các thao tác sau:

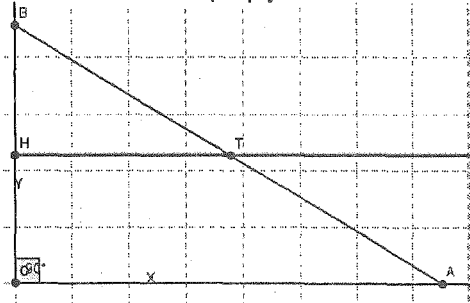
- Cho điểm A di động đến vị trí điểm O, gọi H là trung điểm của BO, nên H thuộc quỹ tích. Do BO cố định nên điểm H cố định;
- Lấy hai vị trí của điểm A, A'. Xác định trung điểm T và T' qua đó xác định đường thẳng TT';
- Bằng trực giác học sinh thấy TT' đi qua H nên sẽ đưa ra giả định: “Nếu H nằm trên TT' thì quỹ tích có khả năng là đường thẳng”;
- Sử dụng chức năng

?  
 $a = b$     Quan hệ giữa 2 đối tượng

dùng cho điểm H và đường thẳng TT' cho ta kết luận điểm H nằm trên đường thẳng TT'. Cũng chức năng đó kiểm tra đường thẳng TT' và tia OB cho ta kết quả là hai đường thẳng này vuông góc với nhau. Vậy lúc này học sinh có thể đưa ra hướng chứng minh quỹ tích điểm T là đường trung trực của OB.

Tiếp tục với ví dụ này, khi học sinh tìm ra quỹ tích thuộc đường thẳng trung trực của OB nhưng chưa xác định được giới hạn quỹ tích. Trên phần mềm Geogebra, giáo viên cho điểm A di động trên tia Ox. Khi A tiến tới O thì T tiến đến H. Như vậy, có thể chỉ ra rằng quỹ tích điểm T bị giới hạn tại H. Để minh họa rõ nét hơn, giáo viên chọn chuột phải vào điểm T và chọn Mở dấu vết khi di chuyển là thuộc tính để lại vết khi di chuyển. Từ đó, xác định được giới hạn quỹ tích là phần đường thẳng giới hạn bởi điểm H.

Hình 4: Giới hạn quỹ tích điểm T



**Ví dụ 3: Sử dụng Geogebra để minh họa quỹ tích dưới dạng động:** Cho hình vuông ABCD và một điểm M di động trên đường chéo BD. Dựng ME vuông góc với AB và MF vuông góc với AD. Tìm tập hợp giao điểm P của CF và DE, giao điểm N của CE và BF.

- Thực hiện thao tác vẽ hình trên Geogebra như sau:
- Chọn công cụ Đa giác đều để

dựng đa giác đều với số cạnh là 4 (hình vuông ABCD);



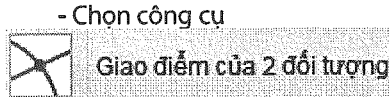
- Chọn công cụ **Đoạn thẳng** để vẽ đoạn thẳng BD;



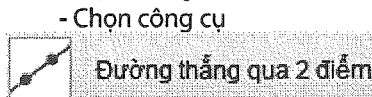
- Chọn công cụ **Điểm thuộc đối tượng** để lấy điểm M trên đoạn BD;



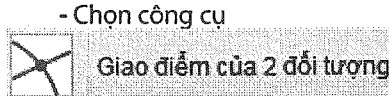
- Chọn công cụ **Đường vuông góc** để vẽ đường thẳng qua M vuông góc với AB và đường thẳng qua M vuông góc với AD;



để xác định các giao điểm E và F;



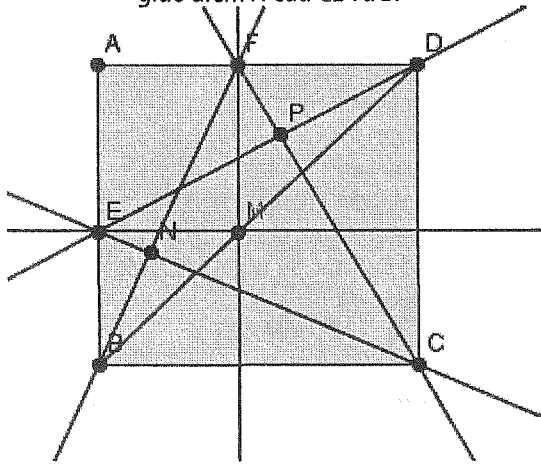
để vẽ các đường thẳng CF, DE, CE, BF;



để xác định các giao điểm P và N;

Ta thu được hình vẽ sau:

Hình 5: Giao điểm P của CF và DE, giao điểm N của CE và BF



Cho M di chuyển trên đoạn BD:

- Khi M trùng vào B thì N trùng vào B, P trùng vào O;

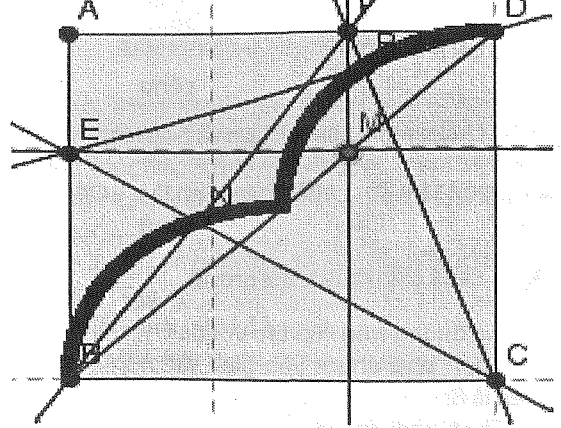
- Khi M trùng vào A thì N trùng vào O, P trùng vào D;

- Khi M nằm tại một điểm bất kì trên DB. Kiểm tra tính thẳng hàng của các điểm N, O, B và P, O, D.

Từ đó, học sinh dự đoán quỹ tích của N là cung OB, quỹ tích của P là cung OD. Tiếp theo, giáo viên cho học sinh quan sát hình ảnh quỹ tích của N và P khi

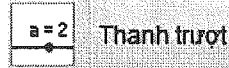
M thay đổi. Hình ảnh có dạng như sau:

Hình 6: Quỹ tích của P và N khi M thay đổi

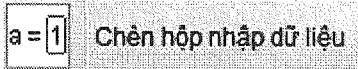


Ví dụ 4: Sử dụng Geogebra để mở rộng bài toán quỹ tích: Cho góc xOy cố định; hai điểm A và B chuyển động tương ứng trên Ox và Oy sao cho  $OA + OB = a$  (a là đoạn cho trước). Tìm tập hợp trung điểm I của AB.

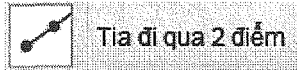
Vì  $OA + OB = a$  cho trước nên  $OA \leq a$ . Vậy A di chuyển trên đoạn  $OA_1$  có độ lớn bằng a, A, thuộc tia Ox và B di chuyển trên  $OB_1$  có độ lớn bằng a, B, thuộc Oy. Các bước dựng hình như sau:



- Chọn công cụ **Thanh trượt** nhập các giá trị của a;

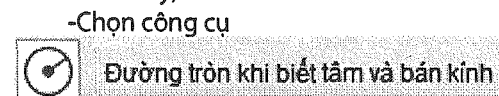


- Chọn công cụ **Chèn hộp nhập dữ liệu** nhập tiêu đề  $OA+OB = a$ ;

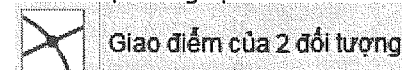


- Chọn công cụ **Tia đi qua 2 điểm** dựng hai tia;

- Chọn phải chuột tại các điểm để đặt lại tên cho tia là Ox và Oy;



- Chọn công cụ **Đường tròn khi biết tâm và bán kính** vẽ đường tròn tâm O bán kính a;



xác định giao điểm của O với các tia Ox, Oy;

- Chọn phải chuột tại các giao điểm đặt lại tên giao điểm của đường tròn O với Ox là  $A_1$ , giao điểm của đường tròn O với trục Oy là  $B_1$ ;

- Chọn phải chuột vào đường tròn O chọn thuộc tính "hiện thị đối tượng" để ẩn đi đường tròn;



- Chọn công cụ **Điểm thuộc đối tượng** để lấy điểm A trên  $OA_1$ ;

**Khoảng cách** để tính khoảng cách từ O đến A;

- Chọn công cụ để tính

**Đường tròn khi biết tâm và bán kính** để vẽ đường tròn tâm O và nhập bán kính là  $a - OA$ ;

- Chọn công cụ để vẽ

**Giao điểm của 2 đối tượng** xác định giao điểm của đường tròn vừa tạo với tia Oy;

- Chọn phải chuột vào giao điểm vừa xác định đặt tên là B;

- Chọn phải chuột vào đường tròn, chọn thuộc tính để ẩn đi đường tròn;

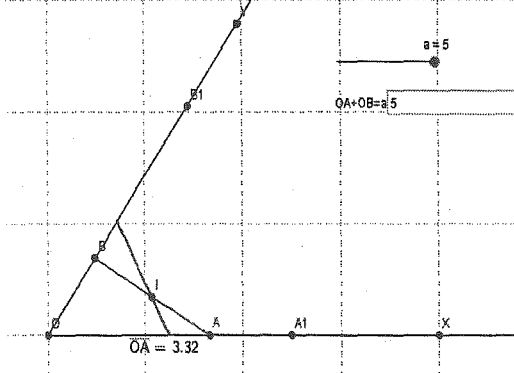
**Đoạn thẳng** để vẽ đoạn thẳng AB;

- Chọn công cụ để vẽ đoạn thẳng AB;

**Trung điểm hoặc tâm** xác định trung điểm của AB, chọn phải chuột vào trung điểm đặt lại tên là I;

**Quỹ tích** rồi chọn lần lượt I và A ta thu được hình ảnh quỹ tích của I khi A thay đổi.

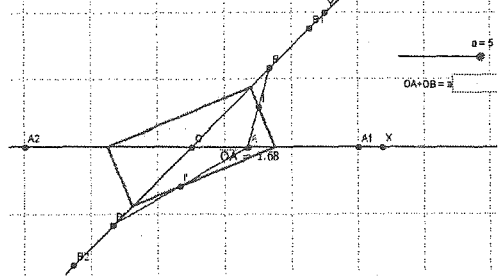
Kết quả hình vẽ thu được như sau:  
**Hình 7: Quỹ tích của điểm I khi A thay đổi**



Bài toán có thể mở rộng khi thay tia Ox, Oy bằng hai đường thẳng cắt nhau x, y. Khi đó, các bước dựng tương tự như trên và đường tròn (O,a) giao với đường thẳng x tại hai điểm là  $A_1, A_2$ . A sẽ di chuyển trên đoạn  $A_1A_2$ .

Đường tròn tâm O bán kính  $(a - b)$  giao với đường thẳng y tại hai điểm B và B', ta gọi I là trung điểm của AB, I' là trung điểm của AB'. Khi đó, quỹ tích điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán có hình ảnh như sau:

**Hình 8: Quỹ tích điểm I và I' khi A thay đổi**



Với số a cho trước được cho tương ứng với giá trị trên thanh trượt, để có những hình ảnh khác nhau với các giá trị của a ta chỉ cần thay đổi con trượt trên màn hình.

**3. Kết luận**

Các ví dụ minh họa trên cho thấy sự độc đáo khi sử dụng phần mềm Geogebra trong dạy học quỹ tích là kết hợp giữa vẽ hình với hoạt động kiến tạo. Phần mềm Geogebra lôi cuốn học sinh ở tính động, tương tác cao cùng tính cấu trúc của nó đã làm nổi bật đối tượng hình học, những thuộc tính và mối quan hệ giữa các hình hình học và tạo nên các hình ảnh sinh động. Việc khai thác Geogebra trong dạy học toán nói chung và dạy học quỹ tích nói riêng là một trong những biện pháp tăng cường tính tích cực, chủ động, sáng tạo của học sinh.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

1. Nguyễn Hữu Châu (2005), *Những vấn đề cơ bản về chương trình và quá trình dạy học*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
2. Nguyễn Bá Kim (2004), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội, 2004.
3. Bùi Văn Nghị (2008), *Vận dụng lí luận vào thực tiễn dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
4. Đào Tam, Trần Trung (2010), *Tổ chức hoạt động nhận thức trong dạy học môn Toán ở trường trung học phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.

**SUMMARY**

The locus problem is one of the difficult Mathematical formats in general education, not just for students to acquire knowledge but also for teachers to transmit knowledge. In order to solve the locus problem, students must explore carefully the theme in order to determine the fixed factors, variable factors, predict and prove locus. This paper presents how teachers should exploit Geogebra software. GeoGebra software is not merely a dynamic geometrical software but also a dynamic algebra and calculation software. In addition, GeoGebra is also a highly compatible software. Using this software will help teachers assist students in predicting, proving, illustrating, limiting and expanding the locus problem in schools of general education.