PHÂN LOẠI SAI LẦM CỦA HỌC SINH TRONG DẠY HỌC TOÁN

ThS. TRẦN ANH DŨNG
Trường THPT chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai

Đã có nhiều công trình nghiên cứu về sai lầm (SL) của học sinh (HS) trong dạy học môn Toán. Trong bài báo của mình [3], tác giả Lê Văn Tiến cũng đã trình bày một tiếp cận SL từ góc độ của thuyết hành vi và thuyết kiến tạo. Cùng quan điểm với thuyết kiến tạo nhưng lí luận dạy học toán theo trường phái của Pháp đã tạo nên nét độc đáo riêng bằng cách liên kết quan điểm của thuyết kiến tạo và định đề của trường phái Bachelard [5] để có cái nhìn tích cực và sâu sắc hơn về khái niệm SL[1].

Tổng hợp quan điểm của thuyết hành vi, thuyết kiến tạo và của lí luận dạy học toán, chúng tôi đưa ra một phân loại sau đây về SL. Tiêu chí phân loại là cách giải thích về nguồn gốc của SL đó:

- SL do bất cẩn, vô ý hoặc do hiểu sai vấn đề cần giải quyết;
- SL do thiếu kiến thức;
- SL do không nắm vững kiến thức, yếu kĩ năng hoặc khả năng suy luận;
- SL do hạn chế về phát triển cá thể; SL có nguồn gốc từ chướng ngại;
- SL là hệ quả của hợp đồng dạy học.

Nhiều công trình nghiên cứu trong chuyên ngành lí luận và phương pháp dạy học Toán ở Việt Nam đã đề cập đến ba loại SL đầu tiên. Ở đây, chúng tôi chỉ đưa ra các ví dụ giải thích và minh họa cho ba loại SL cuối cùng của danh sách trên.

1. SL do hạn chế về phát triển cá thể

Con người từ lúc còn nhỏ đến khi trưởng thành trải qua nhiều giai đoạn phát triển cá thể khác nhau cả về tâm lí cũng như tư duy... Giới hạn phát triển cá thể ở mỗi giai đoạn cũng là nguồn gốc của SL.

Ta minh họa điều này từ câu hỏi sau:

Làm thế nào HS khẳng định một mệnh đề là đúng? Nói cách khác, HS kiểm chứng tính đúng đắn của một mệnh đề ra sao?

Từ một thực nghiệm đối với HS, Balacheff [6] đã phân biệt hai kiểu kiểm chứng sau:

- *Kiểm chứng thực dụng:* Xác nhận chân lí của một mệnh đề nhờ vào hành động và kinh nghiệm;
- *Kiểm chứng trí tuệ:* Kiểm chứng không dựa vào kinh nghiệm. Đó là những cách xây dựng của trí tuệ dựa trên những khái niệm, định nghĩa, tính chất tường minh. Phép chứng minh là một kiểm chứng trí tuệ đặc biệt.

Theo [6], có ba kiểu kiểm chứng thực dụng:

- *Kiểm chứng kiểu "Chủ nghĩa kinh nghiệm ngây thơ"*: Khẳng định chân lí của một mệnh đề bằng cách kiểm tra một vài trường hợp cụ thể và không đặt ra vấn đề khái quát hóa;
- *Kiểm chứng kiểu "Thí nghiệm quyết đoán"*: Khẳng định chân lí của một mệnh đề bằng cách kiểm tra một vài trường hợp mà HS cho là *ít riêng biệt nhất*. Cách làm này về cơ bản vẫn thuộc kinh nghiệm, nhưng khác với chủ nghĩa kinh nghiệm ngây thơ ở chỗ vấn đề khái quát hoá được đặt ra;
- *Kiểm chứng kiểu "Thí dụ đại diện và thực nghiệm thầm trong óc"*: Kiểm chứng này cố trình bày rõ ràng những lí lẽ về chân lí của mệnh đề, bằng cách thực hiện những thao tác trên một đối tượng đặc biệt, nhưng lại được chủ thể xem như (tưởng tượng như) không có tính đặc biệt và riêng rẽ mà đại diện cho cả một lớp cá thể.

Trong dạy học toán, do hạn chế về phát triển cá thể, người ta không thể đòi hỏi HS tiểu học biết sử dụng các kiểm chứng trí tuệ nói chung và chứng minh nói riêng. Như vậy, nếu yêu cầu HS tiểu học xác nhận một mệnh đề đúng hay sai thì các em thường kiểm tra qua một vài trường hợp đặc biệt hoặc quan sát, đo trên hình vẽ và kết luận. Nhưng từ quan điểm khoa học toán học, đó là những cách hợp thức hóa sai!

2. SL có nguồn gốc từ chướng ngại

Các đặc trưng sau đây hình thành nên điều kiện cần của một chướng ngại (CN) theo quan điểm của lí luận dạy học toán:

- CN là một kiến thức, một quan niệm, ***chứ không phải là một khó khăn*** hay sự thiếu kiến thức;
- Kiến thức này cho phép tạo ra câu trả lời phù hợp trong một số tình huống thường gặp. *Nhưng khi vượt ra khỏi những tình huống quen thuộc đó nó sẽ sinh ra các câu trả lời sai*. Để có câu trả lời đúng trong mọi tình huống cần có một quan điểm hoàn toàn khác;
- Kiến thức này chống lại những mâu thuẫn với nó và gây khó khăn cho việc thiết lập một kiến thức mới hoàn thiện hơn. Việc có một kiến thức khác tốt hơn không đủ cho kiến thức cũ này biến mất. Do đó, cần phải xác định kiến thức "sai" này và thực hiện loại bỏ nó trong quá trình xây dựng kiến thức mới;
- Ngay cả khi chủ thể đã ý thức được về sự không chính xác của kiến thức CN này thì nó vẫn tiếp tục xuất hiện một cách dai dẳng và bất chợt.

Ví dụ 1 về SL sinh ra từ CN: Khi học về số thập phân, HS thường phạm phải các SL dạng sau đây:

[1] Định đề này khẳng định rằng trong lịch sử các môn khoa học, SL không phải là một "tai nạn", SL không nằm ngoài kiến thức mà chính là biểu hiện của kiến thức, nó góp phần tạo nn nghĩa của kiến thức.

$(5,6)^2 = 25,36$ $6,14 : 3,2 = 2,7$

$\sqrt{16,4} = 4,2$ $3,5 \times 4,21 = 12,105$

$2,12 < 2,106$ (vì $2 = 2$ và $12 < 106$)

Một số nghiên cứu đã khẳng định, các SL trên của HS có nguồn gốc từ quan niệm: Số thập phân (dương) là hai số tự nhiên ghép với nhau bởi dấu "phẩy". Quan niệm (sai) này của HS vừa có nguồn gốc khoa học luận, vừa có nguồn gốc sư phạm. Nguồn gốc sư phạm thể hiện ở việc chọn đưa vào khái niệm số thập phân thông qua phép đo đại lượng. Khi đó, số thập phân được hiểu như là cách viết lại số tự nhiên theo các đơn vị đo khác nhau, các đơn vị đo kế tiếp nhau hơn kém nhau 10 lần. Với quan niệm này HS sẽ chuyển hành động cần thực hiện với số thập phân về hành động trên hai số tự nhiên và nối hai kết quả với nhau bằng dấu phẩy.

Điều đáng lưu ý là trong nhiều trường hợp cách giải dựa vào quan niệm SL trên lại cho câu trả lời đúng, chẳng hạn như với bài toán:

"Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần:

0,23; 0,16; 1,54; 2,43; 1,29; 2,18".

Quan niệm sai nêu trên sẽ được củng cố và trở nên bền vững hơn nếu tất cả các bài tập mà HS gặp phải trong quá trình học về số thập phân (có thể do tình cờ) đều có dạng mà quan niệm trên cho câu trả lời đúng.

Như vậy, quan niệm "số thập phân là hai số tự nhiên ghép với nhau bởi dấu "phẩy" là một CN cho việc học các kiến thức về số thập phân. CN này là nguồn gốc của nhiều SL mà HS phạm phải khi giải quyết các bài toán gắn liền với số thập phân, trong đó có các SL đã nêu ở trên.

Ví dụ 2: Nhiều nghiên cứu, chẳng hạn như Duroux [7], Nguyễn Thiện Chí [1], cho thấy HS thường phạm phải những SL dạng sau đây khi giải các bài toán về giá trị tuyệt đối:

$|\alpha| = a$; $|-(a^2+3a-5)| = a^2+6a-5$

Nếu $a > 0$ thì $|a+2| = a + 2$. Nếu $a < 0$ thì $|a+2| = -a + 2$ (theo HS chỉ dấu của a là thay đổi trong phạm vi mà +2 dương)

Nếu $|a+2| = 4$ thì $a = 2$ hoặc $a = -2$ (HS tìm giá trị tuyệt đối của a bằng cách giải $|a|+2=4$)

Nếu $|a+2| > 0$ thì $|a+2| = a + 2$

Nếu $|a+2| < 0$ thì $|a+2| = -a - 2$

$$|a+b| = |a| + |b|; \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Theo Duroux, các kiến thức sau đây hình thành nên CN cho việc học tập về giá trị tuyệt đối, là một trong các nguyên nhân chủ yếu của SL:

- Quan niệm số như là độ đo và quan niệm số nguyên âm là một kí hiệu gồm số nguyên dương và dấu trừ đứng trước;

- Tính hai mặt của cặp Số/Dấu. Chẳng hạn, -3 có thể được hiểu là số đối của số 3 hoặc là số 3 gắn theo dấu

3. SL là hệ quả của hợp đồng dạy học

Tác giả không có tham vọng đưa ra một định nghĩa chính xác thế nào là hợp đồng dạy học. Chúng tôi chỉ mong muốn, thông qua các ví dụ dưới đây, độc giả sẽ có một ý niệm ban đầu về khái niệm này và hệ quả mà nó mang lại.

Ví dụ 3: Trong [2], tác giả đã tiến hành một thực nghiệm trên với đối tượng là 110 HS lớp 11 ở thời điểm sau khi học định lí giá trị trung gian. Câu hỏi của thực nghiệm này như sau:

Phương trình

$$-3x^4 + 10x^3 + 6x^2 - 24x - \frac{861}{50} = 0$$

có nghiệm trên khoảng (-5; 5) hay không?

Hầu hết HS (trên 98%) đều có kết luận phương trình không có nghiệm trên (-5;5) (thực ra, phương trình có 2 nghiệm thuộc (-1;0), các nghiệm đó có giá trị gần đúng là $x \approx -0,9330275$ và $x \approx 0,9154408$). SL chủ yếu do chỉ thử các số nguyên và hữu tỉ trên khoảng đã cho. HS không tìm được cặp số a, b nào thỏa $f(a).f(b) < 0$.

Nghiên cứu của [2] đã cho thấy, trong tất cả những tình huống trong sách giáo khoa có sự xuất hiện của bài toán liên quan đến việc vận dụng định lí giá trị trung gian, bài toán luôn được cho dưới dạng câu hỏi: « Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên một khoảng (a; b)». Bài tập trong sách giáo khoa và sách bài tập luôn luôn được lựa chọn mà phương trình đã cho được « bảo đảm » thỏa mãn điều kiện: tìm được các số nguyên c, d thuộc (a ; b) mà $f(c).f(d) < 0$. Nếu trong quá trình giảng dạy, giáo viên cũng luôn cho đối tượng này xuất hiện dưới dạng đó thì một dạng thức hành động sau (gọi là qui tắc của hợp đồng dạy học) sẽ hình thành một cách ngầm ẩn ở HS:

Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên một khoảng nào đó, HS chỉ có trách nhiệm làm các phép thử với các số nguyên thuộc khoảng đã cho để xác định cặp số nguyên c, d mà $f(c).f(d)<0$.

Một điểm cần lưu ý là những quy tắc của hợp đồng dạy học thường được hình thành một cách ngầm ẩn, ít khi xuất hiện dưới dạng tường minh hay bằng văn bản. Nhà nghiên cứu chỉ có thể phát hiện được nó qua thực nghiệm thích hợp.

Ví dụ 4: Người ta đề nghị HS tiểu học ở Pháp giải bài toán "Tuổi thuyền trưởng" sau [4]:

" Trên một chiếc tàu có 26 con cừu và 10 con dê. Hỏi tuổi của thuyền trưởng là bao nhiêu?"

Bài toán lạ lùng này được tiến hành thực nghiệm trên ba nhóm HS: 97 HS lớp 2, 171 HS lớp 2 và lớp 3, 118 HS lớp 4 và lớp 5. Tỉ lệ HS cho câu trả lời bằng cách sử dụng giả thiết đã cho là: 78,3% HS nhóm 1; 74,3% HS nhóm 2; 19,5% HS nhóm 3.

Chẳng hạn, có HS trả lời tuổi thuyền trưởng là 36 sau khi làm phép tính 26 +10 = 36, hoặc có em tính 26 -10 = 16 và cho đáp số là 16. Đánh giá thế nào về bài toán và kết quả nêu trên?

Một số nhà nghiên cứu cho rằng bài toán và ứng xử của HS là vô lí! Nếu có giải thích thì người ta thường cho rằng do hạn chế về phát triển cá thể nên HS ở lứa tuổi đó chưa nhận ra sự bất hợp lí trong mối quan hệ giữa giả thiết và yêu cầu của bài toán.

Tuy nhiên, các nhà lí luận dạy học toán theo trường phái của Pháp không thỏa mãn với cách giải thích đó. Họ cho rằng SL không phải là ngẫu nhiên, tùy tiện hoặc do hạn chế về sự phát triển cá thể, mà còn có các yếu tố khác cho phép giải thích tính hợp lí trong câu trả lời SL của HS.

Theo quan điểm của lí luận dạy học toán, chính quá trình học toán ở tiểu học đã hình thành ở HS những qui tắc của hợp đồng dạy học sau đây:

- Một bài toán được đặt ra phải có câu trả lời (đáp số);
- Để có được đáp số cần sử dụng tất cả các giả thiết đã cho và cần sử dụng các kiến thức vừa được học (trong trường hợp này là các phép toán cộng, trừ, nhân và chia – tùy theo cấp lớp);
- HS không có trách nhiệm về tính hợp lí của bài toán mà chính giáo viên phải đảm bảo điều đó.

Như vậy, HS phạm phải SL không phải vì không nắm vững kiến thức được giảng dạy trong lớp. Bằng chứng là các em vẫn thành công trong việc giải các bài toán mà chương trình yêu cầu ở cấp độ này. SL xuất phát từ những qui tắc của hợp đồng dạy học.

Đến đây, ta có thể đưa ra một mô tả như sau về khái niệm hợp đồng dạy học:

"Hợp đồng dạy học là tập hợp những qui tắc phân chia và hạn chế trách nhiệm của HS và giáo viên, đối với một tri thức toán học được giảng dạy".

Ví dụ 5: Qui tắc hợp đồng dạy học không chỉ là nguyên nhân của SL. Trong nhiều trường hợp, nó còn cho phép HS tạo ra câu trả lời đúng. Ta thấy rõ điều này qua ví dụ sau đây trích từ thực nghiệm của Lê Văn Tiến [8] tiến hành năm 1995 với HS ba lớp 10 của Cộng hòa Pháp:

"Đường cong (C) sau đây là đồ thị của hàm số y = f(x)

a) Nghiệm của phương trình f(x) = -3 là:

☐ *(-2;-3); (0;-3); (0,5;-3)*

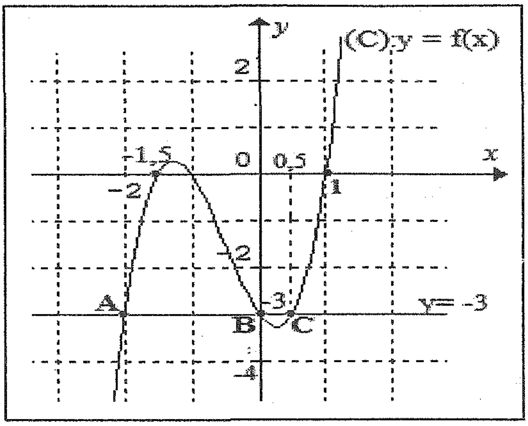
☐ *-3*

☐ *Các điểm A, B, C*

☐ *-2; 0; 0,5*

☐ *-1,5; -1; 1.*

(Em có thể đánh dấu một hoặc nhiều ô)



b) Giải thích vì sao em chọn như vậy trong câu a".

Kết quả đáng lưu ý là 69% HS có lựa chọn sai trong câu a. Trong đó:

+ 26,7% HS chọn ô thứ 3 và 4 (nghiệm là hoành độ giao điểm và cũng là các điểm giao);

+ 15,5% chọn các ô thứ 1,3,4 (nghiệm là hoành độ giao điểm, là các điểm giao và cũng là tọa độ của giao điểm);

+ 15,5% chọn các ô thứ 1,3 (nghiệm là các điểm giao và cũng là tọa độ của chúng);

+ 7% chọn các ô thứ 1,4 (nghiệm là hoành độ giao điểm và cũng là tọa độ của giao điểm);

+ 1,4% chọn ô thứ 1 (nghiệm là tọa độ giao điểm);

+ 1,4% chọn ô thứ 3 (nghiệm là các điểm giao).

Như vậy, nhiều HS đã xem các giao điểm hoặc tọa độ của chúng là nghiệm của phương trình f(x) = -3.

Tuy nhiên, xuất hiện một mâu thuẫn là với một bài toán khác trong thực nghiệm có giả thiết tương tự nhưng câu hỏi là "giải bằng đồ thị phương trình f(x) = 1" thì có đến 78,7% HS đã cho đáp số đúng: Nghiệm chỉ là các hoành độ giao điểm. Không có HS nào cho đáp số nghiệm là các điểm giao hay các tọa độ!

Theo nghiên cứu của [7], quá trình học giải bằng đồ thị phương trình f(x) = k ở thời kì này, HS đã nắm được qui trình giải sau:

- Vẽ đồ thị (C) của hàm số f và đường thẳng y = k (nếu giả thiết chưa cho sẵn);

- Xác định các điểm giao của (C) và đường thẳng;

- Xác định các hoành độ giao điểm và ghi đáp số là các hoành độ này.

Đó là một qui tắc hợp đồng dạy học được hình

(Xem tiếp trang 42)