TĂNG CƯỜNG MỐI LIÊN HỆ GIỮA HÌNH HỌC CAO CẤP VỚI HÌNH HỌC SƠ CẤP TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC CAO CẤP CHO SINH VIÊN SƯ PHẠM TOÁN

TS. TRẦN VIỆT CƯỜNG
Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên

Đặt vấn đề

Các nhà sư phạm cho rằng: Có nhiều vấn đề toán học sơ cấp chỉ có thể được hiểu chính xác và đúng bản chất nếu chúng được nhìn từ những vấn đề của toán học hiện đại. Vì vậy, việc soi sáng toán học sơ cấp bằng toán học cao cấp nói chung và trong lĩnh vực hình học nói riêng là cần thiết.

Đối với giáo viên (GV) môn Toán ở trường phổ thông, việc nắm vững mối liên hệ giữa nội dung kiến thức toán cao cấp và nội dung kiến thức toán sơ cấp là cần thiết nhằm giúp học sinh (HS) hiểu được sâu sắc, nắm được bản chất các vấn đề về toán học phổ thông và có thể dẫn dắt cho HS tìm kiếm các kiến thức mới một cách hiệu quả.

Trong bài viết này, chúng tôi đề cập nghiên cứu việc tăng cường mối liên hệ kiến thức giữa hình học cao cấp (HHCC) với hình học sơ cấp (HHSC) cho sinh viên (SV) ngành Sư phạm toán trong dạy học các học phần HHCC nhằm giúp SV hiểu rõ được bản chất, cội nguồn của các kiến thức của HHSC ở trường phổ thông, thấy được mối quan hệ giữa nội dung kiến thức HHCC được học ở các trường sư phạm với nội dung kiến thức HHSC ở trường phổ thông.

1. Ý nghĩa của việc sử dụng hình học cao cấp soi sáng hình học sơ cấp

Từ việc nghiên cứu, chúng tôi thấy, việc sử dụng HHCC soi sáng HHSC là một việc làm cần thiết, hữu ích và có ý nghĩa bởi các lí do sau:

Thứ nhất, chúng ta biết rằng HHCC nói chung và hình học Ơclít nói riêng là trường hợp tổng quát của hình học phẳng và hình học không gian ở chương trình phổ thông. Vì vậy, việc nhìn nhận một vấn đề của hình học phổ thông dưới "con mắt" của HHCC sẽ làm cho vấn đề được sáng tỏ, được chính xác và khoa học hơn. Từ đó, người GV có được cách nhìn khoa học về một vấn đề đang trực tiếp giảng dạy ở trường phổ thông.

Ví dụ 1: Trong HHCC, chúng ta đã chứng minh được kết quả sau: "Trong n - đơn hình trực tâm $\delta(J_0, J_1, ..., J_n)$, tâm siêu cầu Ơle cùng trọng tâm T, trực tâm H của n - đơn hình cùng nằm trên một đường thẳng, ta gọi đó là đường thẳng Ơle của n - đơn hình $\delta(J_0, J_1, ..., J_n)$, đồng thời với mỗi số q tự nhiên $0 \le q \le n-1$ gọi O_q là tâm siêu cầu Ơle loại q của n - đơn hình. Khi đó, ta có $\overrightarrow{HO_q} = \frac{n+1}{2(q+1)}\overrightarrow{HT}$."

Dựa vào kết quả của định lí trên trong HHCC, chúng ta có các kết quả sau trong HHSC:

- Bài toán 1: Cho tam giác ABC. Gọi H, G và O lần lượt là trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

- Bài toán 2: Chứng minh rằng trong tứ diện trực tâm, trọng tâm của nó nằm tại trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm với tâm của mặt cầu nội tiếp của tứ diện đó.

Có thể thấy rằng, nếu người GV không nắm vững các kiến thức HHCC thì sẽ cho rằng hai bài toán trên là độc lập với nhau. Nếu người GV hiểu biết về HHCC thì hai bài toán trên chỉ là hai trường hợp đặc biệt của một bài toán tổng quát trong không gian Ơclit n - chiều với n = 2 và n = 3. Đối với người HS, bài toán thứ 1 là bài toán HS đã được biết trong hình học phẳng. Bài toán thứ 2 là bài toán trong hình học không gian, đây lại là bài toán mới đối với các em. Do đó, người GV cần giúp HS chiếm lĩnh bài toán này. Việc GV hướng dẫn HS giải quyết các bài toán như trên vừa rèn luyện cho HS cách giải toán, vừa rèn luyện cho HS được khả năng xem xét bài toán tương tự từ hình học phẳng sang hình học không gian. Qua đó, góp phần bồi dưỡng năng lực giải toán cho HS.

Thứ hai, trong HHCC, các công cụ để giải quyết vấn đề nhiều hơn, phong phú hơn, do đó giúp cho người GV có thể giải quyết được nhiều vấn đề hơn hoặc những vấn đề mà chỉ giới hạn của hình học phổ thông thì khó hoặc không phát hiện ra. Từ đó, người GV chỉ việc đặc biệt hóa các kết quả của HHCC thì sẽ thu được những kết quả của HHSC mang tính chính xác và khoa học. Đây chính là một công cụ để phát hiện vấn đề của người GV.

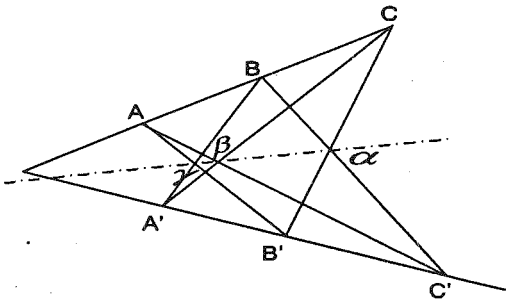
Ví dụ 2: "Trong P^2 [V], cho hai đường thẳng phân biệt d và d'. Cho ba điểm phân biệt A, B, C thuộc đường thẳng d và khác $d \cap d'$ và ba điểm phân

biệt A', B', C' thuộc đường thẳng d' và khác d ∩ d'. Chứng minh rằng <B',C> ∩ <B,C'>, <C',A> ∩ <A',C>, $\langle A',B\rangle \cap \langle B',A\rangle$ là ba điểm thẳng hàng."

Chứng minh:

Đặt $\langle B',C\rangle \cap \langle C',B\rangle = \alpha$, $\langle C',A\rangle \cap \langle A',C\rangle = \beta$, $\langle A',B\rangle \cap \langle B',A\rangle = \gamma$. Chọn đường thẳng $\langle \alpha,\beta\rangle$ làm đường thẳng vô tận D trong mô hình xạ ảnh A_p^2 (Hình 1).

Hình 1



Nếu trong $P^2[V]$, $\langle B',C\rangle \cap \langle C',B\rangle = \alpha$ và $\langle C',A\rangle \cap \langle A',C\rangle = \beta$ thì trong A_p^2 ta có B'C // C'B và C'A // A'C. Do đó, bài toán chuyển về bài toán trong A^2: "Cho hai đường thẳng phân biệt d, d' trong mặt phẳng afin. Gọi A, B và C là ba điểm phân biệt thuộc đường thẳng d. Gọi A', B' và C' là ba điểm phân biệt thuộc đường thẳng d' (khác giao điểm của d với d'). Nếu đường thẳng BC' song song với đường thẳng CB' và đường thẳng CA' song song với đường thẳng AC' thì đường thẳng AB' song song với đường thẳng A'B."

Chứng minh: Trong A^2, do d và d' là hai đường thẳng phân biệt nên có thể xảy ra hai trường hợp sau : d cắt d' hoặc d // d'.

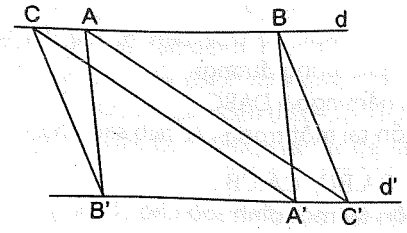
a) Trường hợp d song song với d' (Hình 2). Do BC' // B'C nên BCB'C' là hình bình hành. Do đó, BC = C'B' (1).

Tương tự, do CA' // C'A nên CAC'A' là hình bình hành. Do đó, CA = A'C' (2).

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'B'}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{A'B'}$.

Suy ra, tứ giác ABA'B' là hình bình hành. Do đó, ta có AB'//A'B.

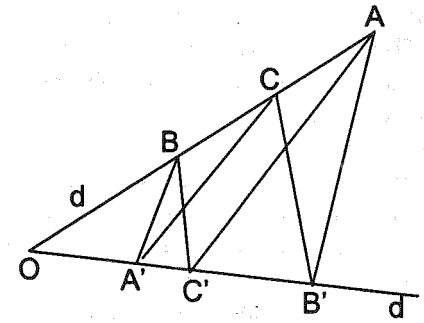
Hình 2



b) Trường hợp d cắt d' tại O (Hình 3). Do BC' // B'C nên ta có DOBC' ~ DOCB'. Suy ra, ta có $\frac{OB}{OC}=\frac{OC'}{OB'}$ (3).

Tương tự, vì CA' // C'A nên DOCA' ~ DOAC'. Suy ra, ta có $\frac{OC}{OA}=\frac{OA'}{OC'}$ (4).

Hình 3



Từ (3) và (4), ta có :

$$\frac{OB}{OC}.\frac{OC}{OA}=\frac{OC'}{OB'}.\frac{OA'}{OC'}\Rightarrow\frac{OB}{OA}=\frac{OA'}{OB'}.$$

Do đó, ta có AB'//A'B.

Vậy trong mọi trường hợp ta đều được AB'//A'B.

Nếu trong A2 ta có BC' // B'C, AC' // A'C và AB' // A'B thì trong P2[V] ta có: <B', C> ∩ <C', B> = a; <C', A> ∩ <A', C> = b ; <A', B> ∩ <A, B'> = g và $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$.

Chuyển kết quả thu được về mặt phẳng xạ ảnh $P^2[V]$ ta được α,β,γ thẳng hàng.

Thứ ba, từ tâm cao người GV có cách nhìn từng vấn đề mang tính chất hệ thống, từ đó có thể xây dựng được nội dung học tập cho HS mang tính "hệ thống" cao, không phải là những bài toán sơ cấp rời rạc, mà là các bài toán thuộc chuyên đề trong một hệ thống hoàn chỉnh hơn.

Ví dụ 3: Từ các kiến thức đã biết về đơn hình, đơn hình trực tâm trong HHCC, đặc biệt hoá chúng ta có được các kết quả trong HHSC liên quan đến trực tâm của tam giác và trực tâm của tứ diện như sau:

* Đối với tam giác ta có các kết quả sau:

1) Trong tam giác, trực tâm nằm trong tam giác

khi và chỉ khi tâm của đường tròn ngoại tiếp cũng nằm trong tam giác đó.

2) Cho DABC có trực tâm H. Khi đó, ta có các mệnh đề sau tương đương:

a) H nằm ngoài DABC.

b) Tồn tại một trong các tích sau nhận giá trị âm: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

c) Tồn tại một đỉnh sao cho H cùng với hai đỉnh còn lại tạo thành các tam giác có trực tâm nằm ngoài.

d) Tồn tại một cạnh sao cho bình phương của cạnh đó lớn hơn tổng bình phương của hai cạnh còn lại.

3) Cho DABC có trực tâm H. Khi đó, ta có các mệnh đề sau tương đương:

a) H nằm trong DABC.

b) Bình phương của một cạnh bất kì nhỏ hơn tổng bình phương hai cạnh còn lại.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} > 0$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} > 0$.

d) Các tam giác HAB, HBC, HCA có trực tâm nằm ngoài tam giác đó.

4) Cho DABC có trực tâm H. Chứng minh:

a) Các tam giác HBC, HCA, HAB lần lượt có các trực tâm là A, B, C.

b) H trùng với A khi và chỉ khi a2 = b2 + c2;

* Đối với tứ diện, ta có các kết quả sau:

1) Điều kiện cần và đủ để tứ diện trực tâm ABCD có trực tâm H nằm trong tứ diện là tâm O của mặt cầu ngoại tiếp cũng nằm trong tứ diện.

2) Tứ diện trực tâm ABCD có trực tâm H nằm ngoài tứ diện khi và chỉ khi có ít nhất một mặt nào đó có trực tâm nằm ngoài tam giác đó.

3) Cho tứ diện trực tâm $A_1A_2A_3A_4$ có trực tâm H. Khi đó, ta có:

a) H nằm ngoài tứ diện khi và chỉ khi tồn tại một đỉnh A_i (i = 1, 2, 3, 4) sao cho $\overrightarrow{A_iA_j}.\overrightarrow{A_iA_k}$, $j \neq k, j,k \neq i$, $1 \leq j, k \leq 4$ không đổi và nhận giá trị âm.

b) H nằm trong tứ diện khi và chỉ khi với mọi i $\in \{1,2,3,4\}$ sao cho $\overrightarrow{A_iA_j}.\overrightarrow{A_iA_k}$, $j \neq k, j,k \neq i$, $1 \leq j, k \leq 4$ không đổi nhận giá trị dương.

c) H trùng với một đỉnh A_i nào đó $\overrightarrow{A_iA_j}.\overrightarrow{A_iA_k} = 0$, $j \neq k, j,k \neq i$, $1 \leq j,k \leq 4$.

4) Nếu tứ diện ABCD có trực tâm H thì HBCD, HACD, HABD, HABC cũng là các tứ diện trực tâm và lần lượt nhận các đỉnh A, B, C, D làm trực tâm.

5) Cho tứ diện trực tâm $A_1A_2A_3A_4$ có trực tâm H, Khi đó, ta có:

a) Nếu H nằm ngoài tứ diện thì tồn tại một đỉnh A_i, (i = 1, 2, 3, 4) sao cho H cùng 3 đỉnh còn lại tạo thành một tứ diện có trực tâm nằm ngoài.

b) Nếu H nằm trong tứ diện thì các tứ diện $HA_1A_2A_3$, $HA_1A_2A_4$, $HA_1A_3A_4$, $HA_2A_3A_4$ có tâm nằm ngoài tứ diện.

c) Nếu H trùng với một đỉnh A_i (i =1, 2, 3, 4) nào đó của tứ diện thì tứ diện tạo bởi H và 3 đỉnh còn lại cũng có trực tâm trùng với H.

6) Cho tứ diện trực tâm ABCD, H là trực tâm của tứ diện. Chứng minh rằng:

a) Trực tâm H trùng với A khi và chỉ khi $S^2_{\Delta BCD} = S^2_{\Delta ABC} + S^2_{\Delta ACD} + S^2_{\Delta ABD}$.

b) Trực tâm H nằm trong tứ diện ABCD khi và chỉ khi bình phương diện tích một mặt nhỏ hơn tổng bình phương diện tích các mặt còn lại.

c) Trực tâm H nằm ngoài tứ diện ABCD khi và chỉ khi tồn tại một mặt sao cho bình phương diện tích mặt đó lớn hơn tổng bình phương diện tích các mặt còn lại.

Thứ tư, các kết quả của từng bài toán trong hình học phẳng và hình không gian đó chính là tài liệu quan trọng mang tính định hướng giúp HS có thể khái quát hóa để có được các kết quả trong HHCC.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng, ta có các kết quả sau: G là trung điểm của đoạn thẳng P1P2 thì $\overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_2} = \vec{0}$ hay G là trọng tâm của tam giác P1P2P3 thì $\overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_2} + \overrightarrow{GP_3} = \vec{0}$. Khai quát các kết quả trên, trong Hình học Afin, chúng ta có định lí "Cho k điểm P1, P2..., Pk của không gian Afin A và k số thuộc trường K: l1, l2..., lk sao cho $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$. Khi đó, có duy nhất điểm G sao cho $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$" và định nghĩa "Điểm G nói trong định lí trên được gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm Pi gắn với họ hệ số li". Trong trường hợp các li bằng nhau, điểm G gọi là trọng tâm của hệ điểm Pi.

Có thể thấy, các kiến thức HHCC và các kiến thức HHSC có mối quan hệ bao hàm, phần kiến thức HHSC chính là các trường hợp đặc biệt của các phần kiến thức HHCC tương ứng.

2. Một số giải pháp nhằm tăng cường mối liên hệ kiến thức giữa hình học cao cấp với hình học sơ cấp trong dạy học hình học cao cấp

Trong quá trình dạy học lí thuyết các học phần HHCC (Đại số tuyến tính, Hình học Afin và Hình học Euclid, Hình học giải tích, Hình học Xạ ảnh và Hình học vi phân) cho SV trên lớp, các giảng viên cần lấy các ví dụ minh hoạ, cần phân tích cho SV thấy được mối quan hệ giữa các nội dung kiến thức của HHCC với các nội dung kiến thức của HHSC mà SV đã được biết trong chương trình phổ thông.

Ví dụ 5: Khi dạy học học phần Đại số tuyến tính

cho SV, khi dạy xong định lí "Tập $S = \{\vec{x}_i\}$ là một cơ sở của không gian vectơ E khi và chỉ khi mọi vectơ $\vec{x}$ của E đều có thể viết dưới dạng $\vec{x} = \sum_i a_i\vec{x}_i$ với các hệ số a_i được xác định một cách duy nhất theo $\vec{x}$" giảng viên có thể đặt vấn đề yêu cầu SV đặc biệt hoá định lí này trong mặt phẳng để SV nhận thấy: Trong mặt phẳng cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương, khi đó $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ là một cơ sở của mặt phẳng. Do đó, với mọi véc tơ $\vec{x}$ trong mặt phẳng đều có thể viết dưới dạng $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với các hệ số là m và n được xác định một cách duy nhất theo $\vec{x}$. Đó chính là định lí SV đã biết trong chương trình sách giáo khoa Hình học 10: "Cho hai véc tơ không không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó, mọi vectơ $\vec{x}$ đều có thể biểu thị được một cách duy nhất qua hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số m và n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$".

- Trong các tiết dạy bài tập các học phần HHCC cho SV, các giảng viên nên đưa các bài tập yêu cầu SV vận dụng các kiến thức HHCC để định hướng tìm tòi lời giải bài toán để giúp cho SV thấy được mối quan hệ giữa các nội dung kiến thức của HHCC với các nội dung kiến thức của HHSC mà SV đã được biết trong chương trình phổ thông.

Ví dụ 6: Giảng viên có thể yêu cầu SV vận dụng kiến thức về tâm tỉ cự để định hướng tìm tòi lời giải bài toán sau: Cho tứ diện ABCD và O là điểm bất kì trong tứ diện. Gọi V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích của các tứ diện OBCD, OCAD, OABD, OABC. Chứng minh rằng $V_1.\overrightarrow{OA} + V_2.\overrightarrow{OB} + V_3.\overrightarrow{OC} + V_4.\overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Ý tưởng vận dụng HHCC. Gọi V là thể tích của tứ diện ABCD. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với hệ thức sau đây:

$$\frac{V_1}{V}.\overrightarrow{OA} + \frac{V_2}{V}.\overrightarrow{OB} + \frac{V_3}{V}.\overrightarrow{OC} + \frac{V_4}{V}.\overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

Điều này chứng tỏ O là tâm tỉ cự của hệ bốn điểm độc lập {A, B, C, D} trong A^3 ứng với họ hệ số $\left\{\frac{V_1}{V}, \frac{V_2}{V}, \frac{V_3}{V}, \frac{V_4}{V}\right\}$, suy ra toạ độ của O trong mục tiêu afin {A; B, C, D} là $\left(\frac{V_2}{V}, \frac{V_3}{V}, \frac{V_4}{V}\right)$, tức là ta có biểu diễn sau: $\overrightarrow{AO} = \frac{V_2}{V}\overrightarrow{AB} + \frac{V_3}{V}\overrightarrow{AC} + \frac{V_4}{V}\overrightarrow{AD}$

Do đó, ta cần chứng tỏ $\left(\frac{V_2}{V}, \frac{V_3}{V}, \frac{V_4}{V}\right)$ là hệ số của $\overrightarrow{AO}$ trong khai triển đối với cơ sở $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$.

- Các giảng viên bộ môn Hình học, nên đưa ra các đề tài cho sinh viên nghiên cứu dưới dạng bài tập lớn, các bài tiểu luận hay các đề tài nghiên cứu khoa học SV để giúp cho SV thấy được mối quan hệ giữa các kiến thức của HHCC với các kiến thức của HHSC.

Ví dụ, giảng viên có thể đưa ra các đề tài sau để SV nghiên cứu:

1) Dùng HHCC để xây dựng hệ thống bài tập HHSC nhằm bồi dưỡng năng lực giải toán cho HS;

2) Khai thác mối liên hệ giữa hình học xạ ảnh và HHSC nhằm nâng cao hiệu quả dạy học môn Hình học ở trường phổ thông;

3) Ứng dụng hình học xạ ảnh vào việc giải và sáng tạo các bài toán HHSC...

Kết luận

Việc tăng cường mối liên hệ giữa nội dung kiến thức HHCC với nội dung kiên thức HHSC cho SV trong quá trình dạy học HHCC không những giúp SV có thể nắm vững được các kiến thức về HHCC ở trường sư phạm mà còn giúp SV hiểu rõ được bản chất, cội nguồn của các kiến thức của HHSC ở trường phổ thông, thấy được mối quan hệ giữa các nội dung HHCC được học tập ở các trường sư phạm với nội dung hình học ở trường phổ thông, từ đó góp phần nâng cao hiệu quả dạy học môn Toán ở trường phổ thông.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Văn Như Cương, Tạ Mân (1998), *Hình học Afin và hình học Ơclít*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

2. Trần Việt Cường, Nguyễn Danh Nam (2013), *Giáo trình Hình học sơ cấp*, NXB Giáo dục Việt Nam.

3. Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Phạm Vũ Khuê, Bùi Văn Nghị (2006), *Hình học 10 (nâng cao)*, NXB Giáo dục.

4. Đào Tam (2004), *Giáo trình Hình học sơ cấp*, NXB Đại học Sư phạm.

5. Ngô Việt Trung (2002), *Giáo trình Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

SUMMARY

For teachers of Maths at general schools, it is necessary to grasp thoroughly the basic and advanced knowledge of Maths in order to help students to understand the nature of general Maths issues and guide them to search effectively for new knowledge. The article refers to the meaning of exploring the advanced geometry knowledge with the aim to clarify the basic geometry knowledge. From that, students in Maths education department will realize the relation between the content of basic and advanced geometry knowledge in advanced geometry semesters at universities of education.