# DẠY HỌC HÌNH HỌC CAO CẤP Ở TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THEO ĐỊNH HƯỚNG HÌNH THÀNH NĂNG LỰC DẠY HỌC CHO SINH VIÊN TOÁN

ThS. NGUYỄN THỊ THANH VÂN
Trường Đại học Hải Phòng

**1. Đặt vấn đề**

Hai thành tố cơ bản trong dạy học ở trường phổ thông (PT) là hoạt động học của học sinh (HS) và hoạt động dạy của giáo viên (GV).

Hoạt động học vừa nhằm chiếm lĩnh kiến thức, kĩ năng, kĩ xảo vừa nhằm phát triển trí tuệ, thay đổi bản thân người học. Hoạt động học vừa có tính chất tái tạo vừa nhằm tiếp thu phương pháp chiếm lĩnh tri thức và được điều khiển một cách có ý thức. Người học là chủ thể của quá trình nhận thức, chủ động sáng tạo tiếp cận, vận dụng tri thức học được vào thực tiễn. Vì thế mà các phương pháp dạy học được chọn lựa, áp dụng đều nhằm phát huy tính tích cực của người học.

Hoạt động dạy luôn tạo ra sự cộng hưởng cao đối với hoạt động học của người học nhằm đạt được mục tiêu giúp người học chiếm lĩnh tri thức hình thành kĩ năng, kĩ xảo. Để phát huy tính tích cực của người học, nâng cao chất lượng giáo dục, vai trò của người thầy trong quá trình dạy học càng trở nên cần thiết hơn bao giờ hết.

Sau khi thiết kế bài học, hoạt động dạy bao gồm các khâu cơ bản như: gợi động cơ học tập; điều khiển các hoạt động nhận thức; đánh giá, xác nhận kiến thức của học sinh.

Để thực hiện tốt việc dạy học, điều khiển tốt quá trình dạy học, GV không chỉ cần có kiến thức cơ bản vững vàng mà còn cần phải có phương pháp dạy học tốt, liên tục trau dồi nhằm nâng cao năng lực nghề nghiệp của bản thân.

Căn cứ đặc điểm dạy học bộ môn Toán, yêu cầu đổi mới dạy học toán, từ mục tiêu giáo dục toán học ở trường PT và chuẩn nghề nghiệp giáo viên trung học, trong giai đoạn hiện nay, người GV toán cần có những yếu tố cơ bản thuộc năng lực nghề nghiệp như:

- Năng lực tổ chức các hoạt động nhận thức trong dạy học;
- Năng lực thu nhận, biến đổi và xử lí thông tin;
- Năng lực bồi dưỡng cho học sinh tư duy lôgic, tư duy thuật giải, tư duy biện chứng, tư duy phê phán, tư duy sáng tạo...;
- Năng lực bồi dưỡng cho HS các cách huy động kiến thức trong dạy học;
- Năng lực tiếp cận phát hiện trong dạy học các tình huống điển hình trong môn Toán (như: dạy học khái niệm mới, dạy học định lí, dạy học giải bài tập toán);
- Năng lực ứng dụng tri thức toán học vào thực tiễn;
- Năng lực chuyển hóa sư phạm, chuyển hoá tri thức khoa học (thuộc toán học cao cấp) và tri thức giáo khoa sang tri thức phương pháp và tri thức truyền thụ;
- Năng lực đánh giá kết quả học tập môn Toán của HS.

Việc rèn luyện năng lực dạy học cho sinh viên (SV)sư phạm là vấn đề cốt lõi cần được quan tâm ngay từ khi họ còn đang học ở trường đại học. SV cần phải được trang bị sâu sắc kiến thức về khoa học cơ bản, đồng thời cũng phải được giáo dục và rèn luyện thành thục những kĩ năng sư phạm. Tất nhiên, việc này không chỉ là nhiệm vụ của tổ bộ môn Giáo học pháp mà còn là nhiệm vụ của các tổ bộ môn khác thuộc khoa Toán các trường sư phạm. Các môn học thuộc các tổ bộ môn khác trong khoa này được trang bị kiến thức nền tảng, cơ bản cho SV, giúp họ có một cái nhìn hệ thống, toàn diện về toán cao cấp, để soi rọi và hiểu thấu toán PT, có khả năng khái quát hóa, mở rộng bài toán, khả năng sáng tạo bài toán mới... Kiến thức cơ bản, nhất là những kiến thức liên quan trực tiếp tới việc giảng dạy luôn là tiềm năng cho nghề nghiệp sau này của SV. Khi đó, nếu có phương pháp dạy học tốt thì năng lực dạy học của họ sẽ được nâng cao. Vì vậy, hiểu rõ và khai thác tiềm năng của toán học cao cấp trong việc phát triển năng lực nghề nghiệp cho SV sư phạm là quan trọng và cần thiết.

Trong bài viết này, tác giả xin trình bày đôi nét về các hướng khai thác khả năng ứng dụng kiến thức môn Hình học cao cấp (HHCC) trong việc dạy học Hình học ở trường PT (HHPT).

**2. Cần chuẩn bị cho SV năng lực tổ chức hoạt động nhận thức cho HS**

Theo triết học, học là một quá trình nhận thức. Vì thế, nó cũng phải tuân theo các quy luật của triết học duy vật biện chứng như: mối liên hệ giữa nội dung và hình thức, liên hệ giữa cái chung và cái riêng, quan hệ nhân quả,...

Ở trường PT có nhiều bài toán về mặt hình thức có thể khác nhau nhưng khi nghiên cứu HHCC ta thấy tất cả cùng một nội dung toán học. Chẳng hạn như:

các bài toán liên quan đến tỉ số đơn, trọng tâm tam giác, tứ diện... đều liên quan đến khái niệm tâm tỉ cự của hệ điểm; hay một số bài toán liên quan đến tam giác, tứ diện có thể quy về cùng một bài toán về đơn hình...

Vì các phân môn của HHCC, như Hình học Afin hay Hình học Xạ ảnh, về bản chất, là nghiên cứu những vấn đề tổng quát của HHPT, nên SV mà nắm vững những bài toán này thì việc nhìn nhận toán PT sẽ theo hệ thống, rõ ràng. Từ đó, đưa ra được phương pháp tổng quát để giải quyết một lớp các bài toán PT.

Đặc trưng của toán học là suy luận, là chứng minh, dựa trên hệ tiên đề ban đầu. Vì thế, việc phát hiện tri thức gốc, tri thức cội nguồn là rất quan trọng, nhất là đối với người dạy. Chỉ khi tìm được và hiểu được kiến thức gốc, người dạy mới thâu tóm kiến thức PT, làm gọn, hệ thống hóa giúp cho việc hướng dẫn người học có hiệu quả.

Nhờ có nhận thức sâu sắc các vấn đề về khoa học cơ bản mà người dạy có thể biết cách chuyển hoá chúng thành tri thức truyền thụ, giúp định hướng cách giải, đưa ra phương pháp giải quyết vấn đề. Điều này đặc biệt quan trọng khi GV tiến hành dạy học HHPT.

**Ví dụ**: "Tâm tỉ cự" là một khái niệm được học ở môn Hình học Afin. Đây là một khái niệm của HHCC có ứng dụng lớn trong việc giải các bài toán PT. Chẳng hạn, ta biết:

Trong không gian Afin $A^n$ cho họ điểm $P_1, P_2,\dots,P_k$ và hệ k số thực $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_k$ sao cho $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \neq 0$

Điểm G thuộc $A^n$ được gọi là ***tâm tỉ cự*** của hệ $P_1, P_2,\dots,P_k$ với họ hệ số $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_k$

nếu $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$.

Kí hiệu $G = T_{tc}\begin{bmatrix} P_1 & P_2\dots & P_k \\ \lambda_1 & \lambda_2\dots & \lambda_k \end{bmatrix}$

Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ thì G gọi là ***trọng tâm*** của hệ $P_1, P_2,\dots,P_k$.

Khi đó $G = T_{tc}\begin{bmatrix} P_1 & P_2\dots & P_k \\ 1 & 1\dots & 1 \end{bmatrix}$

Như vậy, ta có thể sử dụng kiến thức về tâm tỉ cự trong những bài toán liên quan đến tỉ số đơn, hệ thức vectơ.... Chẳng hạn: Nếu G là tâm tỉ cự của họ điểm $P_1, P_2,\dots,P_k$ với họ hệ số $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_k$; G' là tâm tỉ cự của họ điểm $P_1, P_2,\dots,P_m$ với họ hệ số $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_k$ ; m < k; G" là tâm tỉ cự của họ điểm $P_{m+1}, P_{m+2},\dots,P_k$ với họ hệ số $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2},\dots, \lambda_k$ ; $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \neq 0$ ; $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \neq 0$ ; $\sum_{i=m+1}^{k}\lambda_i \neq 0$

Khi đó G là tâm tỉ cự của họ G',G" với họ hệ số $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$ và $\sum_{i=m+1}^{k}\lambda_i$.

Dựa vào đó, ta có thể xác định tâm tỉ cự của họ điểm lớn dựa trên các tâm tỉ cự của các hệ điểm nhỏ hơn. Ta có thể áp dụng tính chất này để giải một số bài toán sau đây:

**Bài toán 1:**Trong không gian cho 4 điểm A,B,C,D. Xét 7 đường thẳng, trong đó 3 đường thẳng tương ứng nối các trung điểm của các đoạn thẳng AB và CD, AC và BD, AD và BC còn 4 đường thẳng tương ứng nối 1 điểm (trong 4 điểm A,B,C,D) với trọng tâm của tam giác tạo bởi 3 điểm còn lại. Chứng minh rằng các đường thẳng đó đồng quy.

Ta có thể dựa vào tính chất trên để đưa bài toán về dạng dựng trọng tâm của hệ 4 điểm A,B,C,D.

***Cách 1***: Chia hệ điểm trên thành 2 hệ con, mỗi hệ 2 điểm và không có điểm chung. Giả sử đó là các hệ {A,B} và {C,D}. Gọi I là trung điểm của AB, thì có ngay $I = T_{tc}\begin{bmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Gọi J là trung điểm của CD, cũng có $J = T_{tc}\begin{bmatrix} C & D \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vậy nếu G là trọng tâm của hệ điểm thì $G = T_{tc}\begin{bmatrix} I & J \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = T_{tc}\begin{bmatrix} I & J \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ suy ra G là trung điểm của IJ. Tương tự chứng minh được G cũng là trung điểm của 2 đoạn thẳng còn lại.

***Cách 2***: Chia hệ điểm đã cho thành 2 hệ con, trong đó một hệ 1 điểm và một hệ 3 điểm; giả sử đó là các hệ {A} và {B,C,D}. Nếu K là trọng tâm của tam giác BCD thì $G = T_{tc}\begin{bmatrix} A & K \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ hay G thuộc đường thẳng AK. Ta xét tương tự với các đường còn lại. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

**Nhận xét:** Khi SV nắm vững khái niệm tâm tỉ cự thì

- Không những có thể giải bài toán đặt ra mà còn có thể chỉ rõ vị trí của điểm G trên từng đường thẳng;
- Có thể khái quát bài toán này (với số điểm tùy ý);
- Có thể xét bài toán với hệ 3 điểm không thẳng hàng, ta được kết quả quen thuộc: "Trọng tâm tam giác chia các đường trung tuyến theo tỉ lệ 1:2";
- Có thể dễ dàng giải được bài toán bằng các tính chất của hình bình hành hay định lí Talet.

**Bài toán 2:** Cho 2 tam giác là ABC và A'B'C'. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện:

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}'+\overrightarrow{MB}'+\overrightarrow{MC}')=0 \quad (1)$$

Nếu gọi G là trọng tâm tam giác ABC, G' là trọng tâm tam giác A'B'C' thì từ (1) ta có ngay

$$(3\overrightarrow{MG})(3\overrightarrow{MG}')=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\overrightarrow{MG}'=0$$

Suy ra tập hợp M là một đường tròn, có đường kính là GG'. Từ đây ta có thể chuyển hoá, để hướng dẫn HS tìm ra được kết quả theo cách mà các em được học ở PT.

**3. Giúp SV phát hiện các bài toán tương tự chính xác**

Vấn đề giải quyết các bài toán tương tự trong PT là tương đối phổ biến. Nhưng việc xác định tính chính xác của các bài toán tương tự là một câu hỏi không dễ có câu trả lời và HHCC có thể giúp cho SV điều đó. HHCC nghiên cứu những bất biến của các nhóm biến đổi, Hình học xạ ảnh xét những bất biến của nhóm xạ ảnh, Hình học Afin nghiên cứu những bất biến của nhóm afin, Hình học Euclid nghiên cứu những tính chất của phép dời hình...Từ việc nghiên cứu những bất biến đó, ta có thể khẳng định chính xác các bài toán tương tự, có thể chuyển các bài toán từ 2 chiều sang 3 chiều hoặc ngược lại, hay tổng quát hóa bài toán. Quay trở lại với ví dụ 2, ta thấy bài toán này thực chất là bài toán Afin liên quan đến đơn hình 2 chiều và trọng tâm của hệ điểm nên có thể chuyển chính xác sang bài toán tương tự trong không gian 3 chiều: Cho 2 tứ diện ABCD và A'B'C'D', tập hợp những điểm thỏa mãn điều kiện

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA}'+\overrightarrow{MB}'+\overrightarrow{MC}'+\overrightarrow{MD}')=0$$

là mặt cầu đường kính GG' với G,G' lần lượt là trọng tâm của 2 tứ diện trên.

**4. Giúp SV tiếp cận hoạt động phát hiện, chuyển hóa các liên tưởng**

Dạy học không chỉ là dạy kiến thức mà quan trọng hơn là dạy phương pháp chiếm lĩnh tri thức và vận dụng tri thức vào cuộc sống. Đối với SV khi nắm vững các kiến thức HHCC, việc nhìn nhận vấn đề trở nên tổng quát, đa dạng nên đứng trước một bài toán, SV có thể nhận biệt bản chất vấn đề, từ đó có thể vận dụng, huy động những kiến thức cần thiết dẫn đến lời giải và từ đó giải quyết các bài toán liên quan.

**5. Giúp SV phát hiện bài toán mới, mở rộng tiềm năng sách giáo khoa**

Từ một bài toán HHCC, bằng cách sử dụng tương tự, khái quát hóa hay đưa về các bài toán cụ thể trong không gian 2, 3 chiều, ta sẽ có một lớp các bài toán mới. Như vậy, nếu GV phổ thông nắm vững mối liên hệ giữa HHCC và HHPT, họ sẽ có khả năng định hướng, giáo dục phương pháp nghiên cứu, mở rộng sách giáo khoa, từ đó tăng cường tính sáng tạo cho HS, một mục tiêu quan trọng của quá trình giáo dục.Ngược lại, từ một bài toán cụ thể của HHPT, bằng cách tổng quát hóa ta cũng hoàn toàn có thể chuyển về một bài toán của HHCC. Từ mối quan hệ 2 chiều này, không những SV hiểu rõ về HHPT mà qua đó càng nắm vững thêm các kiến thức HHCC. Từ ví dụ 2, ta có thể tổng quát thành bài toán sau:

Trong $A^n$ cho 2 hệ điểm $P_1, P_2,.., P_n$ và $Q_1, Q_2,.., Q_m$;

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R; \mu_1, \mu_2, .., \mu_m \in R$$

$$\text{sao cho } \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \neq 0; \sum_{j=1}^{m}\mu_j \neq 0$$

Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện:

$$(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{MP_i})(\sum_{j=1}^{m}\mu_j\overrightarrow{MQ_j})=0$$

Câu trả lời là siêu cầu với đường kính GG', trong đó

$$G=T_{tc}\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix};$$

$$G'=T_{tc}\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \ldots & Q_m \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_m \end{bmatrix}$$

**6. Kết luận**

Qua sự phân tích trên, bước đầu ta có thể khẳng định, nếu trong quá trình SV học tập ở trường sư phạm, được trang bị kiến thức của các môn Toán cao cấp với định hướng gắn liền với toán PT thì sẽ có tác dụng tích cực trong việc nâng cao năng lực sư phạm, trở thành những GV giỏi, đáp ứng yêu cầu ngày càng cao của xã hội.

Để làm được điều này, trước hết giảng viên cần nghiên cứu, khai thác những yếu tố thuộc toán học cao cấp ở trường SP sao cho có thể giúp cho việc rèn luyện nghiệp vụ sư phạm cho SV. Cần dạy học toán học cao cấp theo hướng khai thác các ứng dụng của chúng vào PT. Với môn HHCC, phải nghiên cứu các bất biến của các nhóm biến đổi cụ thể trên các không gian Afin và không gian Euclid: nhóm Afin, nhóm biến đổi xạ ảnh, nhóm dời hình, nhóm đồng dạng... nhằm tăng cường khả năng sáng tạo các bài toán mới cho SV sư phạm dựa trên tư tưởng của HHCC. Từ đó, xây dựng và tổ chức các xêmina khoa học theo hướng phát hiện và giải quyết vấn đề dựa trên tư tưởng của HHCC và chuyển hóa thành ngôn ngữ toán PT.

*(Xem tiếp trang 36)*