VẬN DỤNG NGUYÊN TẮC PHÂN NHỎ TRONG DẠY HỌC GIẢI MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP TOÁN Ở TRUNG HỌC CƠ SỞ

ThS. ĐẶNG THỊ THU HUỆ
Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam

1. Lí thuyết TRIZ và nguyên tắc phân nhỏ

Lí thuyết giải các bài toán sáng chế (viết tắt theo tiếng Nga và chuyển sang kí tự Latinh - TRIZ) của G.S. Altshuller là Lí thuyết tương đối khái quát về sự phát triển của hệ thống. Là nhà sáng chế xuất sắc, nhà nghiên cứu mang tính đột phá lĩnh vực sáng tạo, nhà viết chuyện khoa học viễn tưởng của Liên Xô trước đây, Genrikh Saulovich Altshuller (1926 – 1998) đã xây dựng TRIZ dựa trên khối lượng lớn các thông tin về sự phát triển (kể cả những phát triển không có con người tham gia), tri thức của nhiều bộ môn khoa học và kĩ thuật để đi tìm các quy luật phát triển của các hệ thống. TRIZ chỉ ra rằng các phương pháp sáng tạo phải được xây dựng sao cho chúng có thể giúp những người sử dụng định hướng suy nghĩ theo các quy luật phát triển.

Các phương pháp sáng tạo của TRIZ có thể trình bày dưới dạng tổng quan thành các loại sau: Nhóm các phương pháp sáng tạo của TRIZ là tổ hợp các thủ thuật sáng tạo cơ bản; Nhóm các phương pháp sáng tạo của TRIZ được xây dựng dựa trên các cơ sở khác; Algôrit giải các bài toán sáng chế (ARIZ).

Trong các phương pháp sáng tạo của TRIZ, 40 nguyên tắc (thủ thuật) sáng tạo cơ bản là các phương pháp sáng tạo đơn giản nhất. Các nguyên tắc này không chỉ sử dụng riêng cho các lĩnh vực khoa học kĩ thuật mà còn có thể mở rộng, khái quát chúng để áp dụng sang các lĩnh vực sáng tạo khác, kể cả đời sống, sinh hoạt hàng ngày. Trong thực tế, người ta thường dùng tổ hợp của các nguyên tắc nhiều hơn là dùng các nguyên tắc đơn lẻ một cách độc lập.

Nguyên tắc đầu tiên được liệt kê trong danh sách 40 nguyên tắc sáng tạo cơ bản của Altshuller là *Nguyên tắc phân nhỏ*. Nội dung của *Nguyên tắc phân tích nhỏ* là: Chia đối tượng thành các phần độc lập; Làm đối tượng trở nên tháo lắp được; Tăng mức độ phân nhỏ của đối tượng.

Phân nhỏ đối tượng tức là làm cho vừa sức, dễ thực hiện, phù hợp với phương tiện hiện có. Những trường hợp khó giải quyết "trọn gói", "nguyên khối", "một lần" thường phải sử dụng nguyên tắc này. Chẳng hạn, để đóng một chiếc tủ đựng quần áo, người ta phải tính đến việc làm sao cho thuận lợi khi đóng tủ, dễ dàng khi vận chuyển tủ đến nơi sử dụng,... Do đó, phải thiết kế và đóng các bộ phận, chi tiết nhỏ của chiếc tủ. Các bộ phận này có thể tháo dời khi vận chuyển và lắp lại được thành chiếc tủ hoàn chỉnh tại nơi được sử dụng.

2. Nguyên tắc phân nhỏ trong dạy - học Toán ở trường phổ thông

Trong dạy - học Toán ở trường phổ thông, *Nguyên tắc phân nhỏ* thể hiện qua việc phân chia một bài toán thành các bài toán nhỏ (chia đối tượng thành các phần độc lập, làm cho đối tượng trở nên tháo được) mà việc giải các bài toán nhỏ đơn giản hơn đối với học sinh. Trên cơ sở kết quả của các bài toán nhỏ này, ta tổng hợp lại (lắp lại) để giải quyết bài toán ban đầu. Thực tế, trong quá trình dạy - học Toán ở trường phổ thông, có rất nhiều bài toán mà khi suy nghĩ để giải, người giải cần phân bài toán đó ra thành các bài toán nhỏ. Điều quan trọng là làm thế nào để có thể phân nhỏ một bài toán (làm cho bài toán trở nên "tháo được") và tổng hợp được (lắp được) các bài toán nhỏ này để giải quyết bài toán ban đầu. Cần chú ý đến những yếu tố mà nhờ đó nẩy sinh ra suy nghĩ phải tách (tháo) bài toán ra thành các bài toán nhỏ hơn, cũng như tổng hợp (lắp) được các bài toán nhỏ đó.

3. Vận dụng Nguyên tắc phân nhỏ trong dạy học giải một số dạng bài tập toán ở trung học cơ sở

Dưới đây là một số ví dụ vận dụng *Nguyên tắc phân nhỏ* trong dạy học giải một số dạng bài tập toán ở trung học cơ sở, góp phần hình thành nhân cách sáng tạo cho học sinh.

a) ***Ví dụ khi dạy giải bài tập số học***

Khi hướng dẫn học sinh khá giỏi giải các bài toán số học nâng cao, ta thường phải hướng dẫn các em phân nhỏ bài toán thành các bài toán đơn giản hơn.

Ví dụ 1: Chứng tỏ rằng:

$$\frac{11}{15} < \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \ldots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} < \frac{3}{2}$$

Bài toán này, về mặt hình thức, có thể phân thành hai bài toán nhỏ:

Bài toán 1.1: Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \ldots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} > \frac{11}{15};$$

Bài toán 1.2: Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \ldots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} < \frac{3}{2}$$

Tổng $\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \ldots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60}$ là tổng của các phân số có tử là 1, mẫu là các số tự nhiên liên tiếp từ 21 đến 60. Thông thường, với mỗi bài toán nhỏ này chúng

ta tách tổng

$\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+...+\frac{1}{59}+\frac{1}{60}$ thành các tổng nhỏ và áp dụng kĩ thuật so sánh mỗi số hạng của một tổng nhỏ với cùng một số. Số các số hạng của các tổng nhỏ này có thể bằng nhau, có thể khác nhau. Trên cơ sở đó, bài toán 1.1 có thể được phân nhỏ thành các bài toán nhỏ hơn theo các cách khác nhau:

Cách 1: *Bài toán 1.1.1:* Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+...+\frac{1}{39}+\frac{1}{40}>\frac{1}{2}$$

Bài toán 1.1.2: Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}+...+\frac{1}{59}+\frac{1}{60}>\frac{1}{3}$$

Bài toán 1.1.3: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}>\frac{11}{15}$

Cách 2: *Bài toán 1.1.1:* Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+...+\frac{1}{29}+\frac{1}{30}>\frac{1}{3};$$

Bài toán 1.1.2: Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{31}+\frac{1}{32}+\frac{1}{33}+...+\frac{1}{59}+\frac{1}{60}>\frac{1}{2}$$

Bài toán 1.1.3: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}>\frac{11}{15}$

Cách 3: *Bài toán 1.1.1:* Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+...+\frac{1}{29}+\frac{1}{30}>\frac{1}{3}$$

Bài toán 1.1.2: Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{31}+\frac{1}{32}+\frac{1}{33}+...+\frac{1}{39}+\frac{1}{40}>\frac{1}{4}$$

Bài toán 1.1.3: Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}+...+\frac{1}{49}+\frac{1}{50}>\frac{1}{5}$$

Bài toán 1.1.4: Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{59}+\frac{1}{60}>\frac{1}{6}$$

Bài toán 1.1.5: Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}>\frac{11}{15}$$

Đối với các bài toán của cách 1 ta làm như sau:

- Bài toán 1.1.1: So sánh mỗi số hạng của tổng $\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+...+\frac{1}{39}+\frac{1}{40}$ với $\frac{1}{40}$.

- Bài toán 1.1.2: So sánh mỗi số hạng của tổng $\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}+...+\frac{1}{59}+\frac{1}{60}$ với $\frac{1}{60}$.

- Giải bài toán 1.1.3 không có khó khăn. Thao tác tiếp theo là "lắp" các bài toán 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 để có được lời giải của bài toán 1.1.

Các bài toán nhỏ của các cách phân nhỏ khác được giải tương tự.

Ta cũng có cách phân nhỏ bài toán 1.2 thành các bài toán nhỏ và giải chúng tương tự như đối với bài toán 1.1.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 - 1$ chia hết cho 24.

Thông thường, đối với bài toán chứng minh loại này, ta cần sử dụng tính chất *"Nếu m chia hết cho a, m chia hết cho b với a và b là hai số nguyên tố cùng nhau thì m chia hết cho tích a.b."*. Trong bài toán trên, ta chú ý: 24 = 3.8 với 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau. Khi đó bài toán được phân thành hai bài toán nhỏ hơn:

Bài toán 2.1: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 - 1$ chia hết cho 3.

Bài toán 2.2: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 - 1$ chia hết cho 8.

Từ giả thiết p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3, do đó p chỉ có thể chia cho 3 dư 1 hoặc dư 2 và viết dưới dạng 3.k + 1 hoặc 3.k + 2 ($k \in Z$). Khi đó, bài toán 2.1 trở nên đơn giản.

Nhờ lưu ý: $p^2 - 1$ có thể viết thành (p – 1)(p + 1), với p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ. Từ đó có thể phân bài toán 2.2 thành hai bài toán nhỏ hơn:

Bài toán 2.2.a: Chứng minh rằng tích của hai số chẵn liên tiếp thì chia hết cho 8.

Bài toán 2.2.b: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 - 1$ là tích của hai số chẵn liên tiếp. (Chú ý: bài này chỉ cần p là số lẻ).

Giải quyết các bài toán nhỏ, tổng hợp lại (lắp lại), nhờ sử dụng tính chất đã nêu trên, ta giải quyết được bài toán đã cho.

b) Ví dụ khi dạy giải bài tập đại số

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất của $A = x^2(3 - x)$ với $x \geq 0$.

Thông thường, với bài toán tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức, ta cần chứng tỏ biểu thức đó nhỏ hơn hoặc bằng một hằng số. Nhận thấy, A là tích của các thừa số và x + (3 – x) = 3 nên ta nghĩ tới khả năng sử dụng bất đẳng thức Côsi. Khi đó ta cần điều kiện của x để 3 – x dương. Do đó ta có thể phân bài toán thành hai bài toán nhỏ:

Bài toán 3.1: Tìm giá trị lớn nhất của $A = x^2(3 - x)$ với $0 \leq x \leq 3$.

Bài toán 3.2: Tìm giá trị lớn nhất của $A = x^2(3 - x)$ với $x \geq 3$.

Trên cơ sở kết quả của hai bài toán này ta có kết quả của bài toán ban đầu.

Ví dụ 4: Tìm tất cả các nghiệm thực của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = 9 \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1 \\ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ ...,\ x_n > 0 \end{cases}$$

ở đó n là số nguyên dương cho trước.

Hai phương trình của hệ là: $x_1 + x_2 + ... + x_n = 9$ và

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1$$

Hơn nữa ta có

$$x_1.\frac{1}{x_1}=1;\ \ x_2.\frac{1}{x_2}=1;\ \ ...;\ \ x_n.\frac{1}{x_n}=1$$

Vì vậy, ta suy nghĩ tới bất đẳng thức Bunhiacốpxki. Có:

$$(x_1 + x_2 + ... + xn)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n})$$

$$\geq\left(\sqrt{x_1}.\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_2}.\frac{1}{\sqrt{x_2}}+...+\sqrt{x_n}.\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2=n^2.$$

Do đó $n^2 \leq 9$, hay $n \leq 3$. Khi đó, với $n > 3$ hoặc $n = 1$ hệ đã cho vô nghiệm. Phần còn lại của bài toán được phân thành hai bài toán nhỏ hơn:

Bài toán 4.1: Giải hệ:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=9 \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=1 \\ x_1>0,\ \ x_2>0,\ \ x_3>0 \end{cases}$$

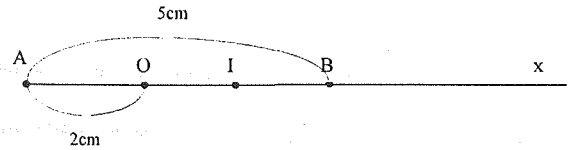
Bài toán 4.2: Giải hệ:

$$\begin{cases} x_1+x_2=9 \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1 \\ x_1>0,\ \ x_2>0 \end{cases}$$

Việc giải hai bài toán nhỏ 4.1 và 4.2 không quá khó. Đối với bài toán 4.1, chỉ cần áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki cho hai bộ ba số thực ta có được $x_1 = x_2 = x_3 = 3$, còn bài toán 4.2 ta sử dụng định Lí Viet đảo để tính x_1, x_2 là hai nghiệm của một phương trình bậc hai.

c) Ví dụ khi dạy giải bài tập hình học

Ví dụ 5: Trên tia Ax lấy hai điểm O và B sao cho AO = 2 cm; AB = 5 cm. Gọi I là trung điểm của OB. Tính AI.



Nhìn trên hình vẽ ta thấy AI = AO + OI. Do đó AI tính được nếu biết OI.

Vì I là trung điểm của OB nên để tính OI ta cần tính BO. Bài toán tính BO là bài toán cơ bản mà học sinh có thể dễ dàng giải được.

Điều đáng nói ở đây là ta không thể nói: "Từ hình vẽ ta có AI = AO + OI". Do đó cần phải giải quyết trước một bài toán nữa là phải giải thích được tại sao điểm O nằm giữa hai điểm A và I.

Vì vậy, bài toán trên có thể phân nhỏ thành các câu như sau:

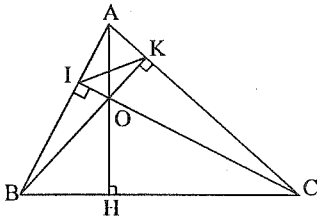
"Trên tia Ax lấy hai điểm O và B sao cho AO = 2 cm; AB = 5 cm. Gọi I là trung điểm của OB.

a) Hãy giải thích tại sao điểm O nằm giữa hai điểm A và I.

b) Tính BO.

c) Tính AI."

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi O là giao điểm ba đường cao AH, BK, CI. Chứng minh BO.BK + CO.CI = BC^2.



Để chứng minh bài toán này, cần chú ý rằng, nếu không liên quan đến số đo độ dài các đoạn thẳng ta thường có một tích hai độ dài đoạn thẳng từ một tỉ lệ thức của hai tỉ số bằng nhau. Tỉ lệ thức này thường có được nhờ định Lí Ta – let (nếu có quan hệ song song) hoặc suy ra từ hai tam giác đồng dạng. Trong bài toán này ta nghĩ đến tam giác đồng dạng.

Muốn có tích BO.BK ta cần có một tỉ lệ thức trong đó BO là tử của tỉ số này thì BK là mẫu của tỉ số kia. Vì vậy, cần BO và BK là hai cạnh của hai tam giác đồng dạng. Hai tam giác đó là BOH và BCK. Khi đó ta có tỉ lệ thức:

$\frac{BO}{BC}=\frac{BH}{BK}$, suy ra BO.BK = BC.BH.

BC có mặt ở vế phải của đẳng thức cần chứng minh (BC^2), hơn nữa ta có BH + HC = BC. Do đó ta cần chứng minh CO.CI = BC.CH. Để chứng minh đẳng thức mới này ta lại cần chứng minh tỉ lệ thức

$\frac{CO}{BC}=\frac{CH}{CI}$, từ đó dẫn đến phải chứng minh hai tam giác COH đồng dạng với tam giác CBI.

Như vậy, bài toán đã được phân nhỏ thành ba bài toán, đơn giản hơn rất nhiều và học sinh có thể dễ dàng giải được (viết dưới dạng câu hỏi trung gian): *"Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi O là giao điểm ba đường cao AH, BK, CI. Chứng minh rằng $\triangle BOH \sim \triangle BCK$; $\triangle COH \sim \triangle CBI$. Từ đó suy ra BO.BK + CO.CI = BC^2."*

Trong dạy học giải bài tập toán ở trường Trung học cơ sở, vận dụng nguyên tắc phân nhỏ để phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ rồi vận dụng phối hợp các nguyên tắc sáng tạo khác để thực hiện các phương án tối ưu trong từng bài toán sẽ giúp giải quyết thành công nhiều bài toán phức tạp. Cần dạy học sinh biết cách

(Xem tiếp trang 27)