PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC SÁNG TẠO THÔNG QUA TẬP DƯỢT NGHIÊN CỨU KHOA HỌC MÔN TOÁN CHO HỌC SINH TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN

ThS. NGUYỄN ÁNH DƯƠNG
Trường THPT Chuyên - Đại học Vinh

1. Đặt vấn đề

Phát triển năng lực sáng tạo và từ đó giúp các em học sinh trung học phổ thông chuyên làm quen với hoạt động nghiên cứu khoa học là một trong những nhiệm vụ quan trọng trong quá trình dạy học nói chung và dạy học môn Toán nói riêng. Nhiều học sinh trường chuyên hiện nay được dạy toán theo một cách mà các em tưởng tượng rằng toán học chỉ là lôgic, có thể chứng minh được, chắc chắn rõ ràng, hợp lí, chính xác, ngắn gọn mà các em không nhận thấy được sự sâu sắc của toán học, của cách thức toán học phát triển. Các phương pháp dạy học hiện nay hướng đến việc cung cấp cho học sinh sản phẩm của tư duy toán học hơn là quy trình tư duy toán học. Điều quan trọng là cần cho học sinh hiểu rõ các bước biến đổi sâu sắc của toán học, các trực giác cần thiết và quá trình tìm kiếm lời giải. Theo cách này, học sinh không nghĩ toán học như là một môn học ngắn gọn, rõ ràng và tường minh ở thời điểm ban đầu và họ dám đương đầu với rủi ro, hình thành một phương pháp nghiên cứu khoa học, nỗ lực tìm tòi, sáng tạo và có thể đóng vai trò trong việc phát sinh toán học mới. "Mục đích của phương pháp khám phá lấy người học làm trung tâm là khuyến khích học sinh tư duy như các nhà toán học, đặt các câu hỏi để kích thích họ cảm nhận toán học" (Stillman).Trong suốt quá trình dạy học, giáo viên nên thường xuyên đặt ra các câu hỏi cơ bản như: "Ai, cái gì, khi nào, ở đâu, tại sao và như thế nào" và việc trả lời các câu hỏi này giúp học sinh suy nghĩ sâu sắc, khám phá, sáng tạo và mở rộng các thách thức toán học.

2. Một số đặc điểm của học sinh trung học phổ thông chuyên và mô hình hoạt động sáng tạo, quy trình tập dượt nghiên cứu khoa học cho học sinh

Học sinh trung học phổ thông chuyên là những học sinh có khả năng tiếp thu nhanh và đã được học các kiến thức cơ bản về toán học một cách kĩ càng, có điều kiện và cơ hội trở thành những cán bộ nghiên cứu khoa học trong tương lai nên hoạt động làm quen với nghiên cứu khoa học của các em hết sức cần thiết và được quản lí một cách khoa học. Để phát huy tối đa tính sáng tạo toán học, học sinh cần được giao các bài toán khó, các tình huống có vấn đề càng ngày càng phức tạp phù hợp với các em. Từ đó, các em cố gắng tìm ra các cách giải quyết hay, đơn giản của các bài toán phức tạp và giáo viên là người hỗ trợ các em trong việc vượt qua các rào cản khi giải quyết các bài toán, tình huống đó, hướng dẫn học sinh phải mềm dẻo, uyển chuyển trong việc tiếp cận với bài toán bằng cách sử dụng các kiến thức, các phương pháp giải quyết khác nhau.

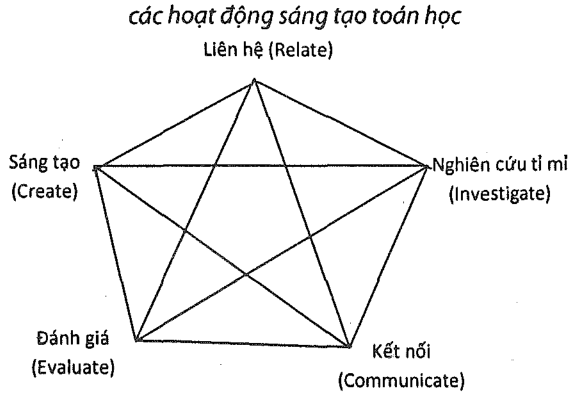
Tuy nhiên, tập trung vào việc giải các bài toán cũng thường có nghĩa là liên quan đến bài toán của ai đó nên trong quá trình dạy học ngoài việc đưa ra các bài toán giáo viên cần phải khuyến khích các em đưa ra các ý kiến, các ý tưởng mới, động viên các em đặt ra các câu hỏi, các dự đoán. Khả năng dự đoán như là cốt lõi của sáng tạo trong toán học, dự đoán có nghĩa là đi xa hơn điều đã biết, đưa ra cách nhìn nhận của cá nhân và đưa ra các quyết định trong toán học (điều này liên quan đến khám phá), đưa ra các câu hỏi, lập luận giải thích, chứng minh và bác bỏ (tập dượt nghiên cứu khoa học).

Bảng 1: Quy trình tập dượt nghiên cứu khoa học của học sinh

Bước 1	Đặt ra các câu hỏi, bài toán
Bước 2	Quan sát, thu thập thông tin, tài liệu
Bước 3	Giải quyết vấn đề đặt ra
Bước 4	Trình bày kết quả

Trong các hoạt động sáng tạo toán học, học sinh có thể sử dụng mô hình σrixtic sau đây:

Hình 1: Mô hình σrixtic để học sinh sử dụng trong các hoạt động sáng tạo toán học



Cụ thể, học sinh có thể thực hiện như sau:

- Liên hệ bài toán cần giải đến các bài toán khác đã giải quyết được;

- Nghiên cứu tỉ mỉ bài toán; suy nghĩ sâu và đặt các câu hỏi;
- Đánh giá các phát hiện của mình;
- Kết nối các kết quả với nhau;
- Sáng tạo các vấn đề mới.

Các mức độ tham gia tập dượt nghiên cứu khoa học của học sinh trong quá trình học tập:

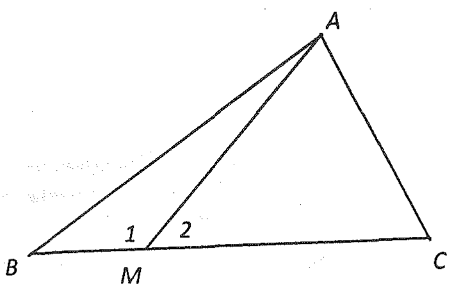
- Bài tập nghiên cứu: Học sinh tự giải quyết bài tập nghiên cứu được giáo viên đặt ra trong bài giảng (chứng minh định lí, giải một bài toán...) với các yêu cầu cụ thể về nội dung, phương pháp, thời gian;
- Bài tập lớn, chuyên đề: Giáo viên đưa ra yêu cầu, học sinh tự phát biểu và giải quyết vấn đề, yêu cầu này cao hơn bài tập nghiên cứu, nội dung rộng hơn, phương pháp đa dạng hơn và nhất là về sản phẩm sẽ phong phú hơn;
- Chuyên đề chuyên sâu: Học sinh khai thác, đi sâu vào một kiến thức nào đó, phải tự đặt vấn đề, phát biểu vấn đề và nghiên cứu giải quyết vấn đề đặt ra.

3. Một số ví dụ minh họa về phát triển năng lực sáng tạo theo hướng tập dượt nghiên cứu khoa học cho học sinh trường trung học phổ thông chuyên

3.1. Hoạt động 1: Mở rộng bài toán

Ví dụ 1: Sau khi học sinh đã được học công thức tính đường trung tuyến trong tam giác, giáo viên gợi ý học sinh hãy xem xét khi M là điểm bất kì trên cạnh BC với $\frac{MB}{MC}=k>0$ thì liệu có xây dựng được công thức tính đoạn AM thông qua các cạnh của tam giác ABC và *k* hay không? Từ đó, bài toán đặt ra cho học sinh là đi xây dựng công thức tính AM.

Bài toán: Cho tam giác ABC, AM là điểm bất kì trên cạnh BC, biết $\frac{MB}{MC}=k>0$



Tính AM theo các cạnh của tam giác ABC và *k*.

+) Học sinh có thể nghĩ đến cách xây dựng công thức đường trung tuyến để sử dụng công cụ vectơ xây dựng công thức tính AM.

Từ $\overline{MB}=-k.\overline{MC}\Rightarrow\overline{AM}=\frac{\overline{AB}+k.\overline{AC}}{1+k}$

$$\Rightarrow AM^2=\frac{AB^2+k^2.AC^2+2.k.\overline{AB}.\overline{AC}}{(1+k)^2}$$

$$\Rightarrow AM^2=\frac{AB^2+k.AC^2}{(1+k)}-\frac{k.BC^2}{(1+k)^2}$$

Nếu đặt *AM= d, MB = m, MC = n*, học sinh thu được:

$d^2=\frac{m}{a}b^2+\frac{n}{a}c^2-m.n$ (đây chính là định lí Stewart)

+) Ngoài việc tương tự hóa bằng cách sử dụng công cụ vectơ thì có thể tính AM bằng cách khác được hay không?

Học sinh cũng có thể sử dụng định lí cosin để xây dựng cách tính AM.

Nhận thấy $\cos M_1+\cos M_2=0$

$$\Rightarrow\frac{AM^2+MB^2-AB^2}{2.AM.MB}+\frac{AM^2+MC^2-AC^2}{2.AM.MC}=0$$

$$\Rightarrow(MB+MC).AM^2$$

$$=MB.AC^2+MC.AB^2-MB.MC.(MB+MC)$$

từ đó các em cũng thu được:

$$AM^2=\frac{AB^2+k.AC^2}{(1+k)}-\frac{k.BC^2}{(1+k)^2}$$

3.2. Hoạt động 2: Bài tập lớn

Sau khi học xong chương trình Hình học không gian, giáo viên đặt ra yêu cầu cho học sinh hãy nghiên cứu từ các kết quả của các bài toán trong phẳng rồi tìm cách mở rộng cho các bài toán trong không gian.

Ví dụ 2: Từ kết quả quen thuộc trong phẳng

Cho tam giác vuông ABC ($\angle A=90^0$). Gọi a,b,c lần lượt là độ dài các cạnh $BC,CA,$ AB và h là độ dài đường cao kẻ từ các đỉnh A của tam giác. Ta có:

1. $b^2+c^2=a^2$
2. $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$

Học sinh có thể mở rộng bài toán trong không gian cho tứ diện vuông

Bài toán: Cho tứ diện $ABCD$ có AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (BCD) và S,S_1,S_2,S_3 lần lượt là diện tích các tam giác ΔBCD, ΔABC, ΔACD, ΔADB. Chứng minh:

1. $S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2$

2. $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AH^2}$

Lời giải bài toán này không khó đối với các em bằng cách sử dụng định lí Pitago, áp dụng trực tiếp công thức diện tích tam giác và kết quả của bài toán trong phẳng.

Ví dụ 3: Từ bài toán đã biết trong phẳng

Cho $\Delta ABC, M$ là một điểm bất kì nằm trong tam giác.

Gọi diện tích các tam giác ΔMBC, ΔMCA, ΔMAB lần lượt là S_1, S_2, S_3.

Chứng minh rằng $S_1.\overrightarrow{MA}+S_2.\overrightarrow{MB}+S_3.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$;

Chứng minh rằng với mọi điểm I ta có hệ thức: $S_1.\overrightarrow{IA}+S_2.\overrightarrow{IB}+S_3.\overrightarrow{IC}=S_{ABC}.\overrightarrow{IM}$

Bằng sự "tương ứng", học sinh có thể mở rộng bài toán trên trong không gian.

Bài toán: Cho tứ diện $ABCD$ và I là một điểm bất kì nằm trong tứ diện đó, kí hiệu $V_i (i=\overline{1;4})$ lần lượt là thể tích các khối tứ diện $IBCD, IACD, IABD, IABC$

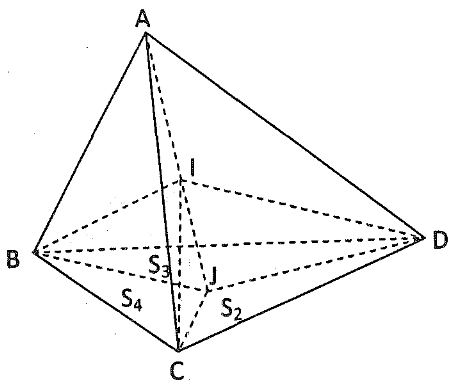
1) Chứng minh rằng:

$V_1.\overrightarrow{IA}+V_2.\overrightarrow{IB}+V_3.\overrightarrow{IC}+V_4.\overrightarrow{ID}=\vec{0}$;

2) Chứng minh rằng với mọi điểm O trong không gian ta luôn có:

$V_1.\overrightarrow{OA}+V_2.\overrightarrow{OB}+V_3.\overrightarrow{OC}+V_4.\overrightarrow{OD}=V_{ABCD}\overrightarrow{OI}$

Áp dụng kết quả ví dụ 2 và phương pháp thể tích học sinh sẽ chứng minh được



a) Gọi *J* là giao của *AI* với (BCD) và diện tích các tam giác $\Delta CJD, \Delta BJD, \Delta BJC$ lần lượt là S_2, S_3, S_4.

ta có: $S_2.\overrightarrow{IB}+S_3.\overrightarrow{IC}+S_4.\overrightarrow{ID}=S_{BCD}.\overrightarrow{IJ}$ (1)

Mặt khác: $\frac{V_{JACD}}{V_2}=\frac{V_{JABD}}{V_3}=\frac{V_{JABC}}{V_4}\Rightarrow$

$$\frac{S_2}{V_2}=\frac{S_3}{V_3}=\frac{S_4}{V_4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) học sinh rút ra được:

$V_2.\overrightarrow{IB}+V_3.\overrightarrow{IC}+V_4.\overrightarrow{ID}=(V_2+V_3+V_4)\overrightarrow{IJ}$ (3),

mà: $\frac{IA}{IJ}=\frac{V_2+V_3+V_4}{V_1}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra:

$V_1.\overrightarrow{IA}+V_2.\overrightarrow{IB}+V_3.\overrightarrow{IC}+V_4.\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

b) Từ câu a) suy ra:

$V_1.(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI})+V_2.(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI})+V_3.(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI})+V_4.(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OI})=\vec{0}$

$\Rightarrow V_1.\overrightarrow{OA}+V_2.\overrightarrow{OB}+V_3.\overrightarrow{OC}+V_4.\overrightarrow{OD}=V_{ABCD}\overrightarrow{OI}$

Ví dụ 4: Từ bài toán trong phẳng

Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng:

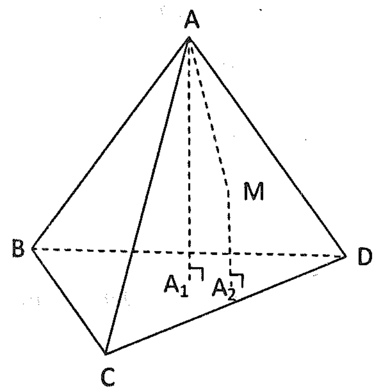
$a.MA+b.MB+c.MC\geq 4.S_{\Delta ABC}$

Suy luận tương tự học sinh mở rộng bài toán trên trong không gian.

Bài toán: Cho tứ diện $ABCD, M$ là một điểm bất kì nằm trong tứ diện đó. Gọi S_A, S_B, S_C, S_D lần lượt là diện tích các tam giác $\Delta BCD, \Delta ACD, \Delta ABD, \Delta ABC$

Chứng minh :

$S_A.MA+S_B.MB+S_C.MC+S_D.MD\geq 9.V_{ABCD}$



Học sinh sẽ nhận thấy áp dụng phương pháp thể tích sẽ chứng minh được.

Gọi $V_i (i=\overline{1;4})$ lần lượt là thể tích các khối tứ diện $MBCD, MACD, MABD, MABC$. Các em sẽ nhận ra:

$AA_1\leq MA+MA_2\Rightarrow V_{ABCD}\leq\frac{1}{3}S_A.MA+V_1$

tương tự:

$V_{ABCD}\leq\frac{1}{3}S_B.MB+V_2$; $V_{ABCD}\leq\frac{1}{3}S_C.MC+V_3$

$$V_{ABCD} \le \frac{1}{3}S_D.MD + V_4$$

Từ đó, học sinh sẽ suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5: Từ bài toán trong mặt phẳng

Cho tam giác ABC. Gọi a,b,c lần lượt là độ dài các cạnh BC,CA,AB và m_a,m_b,m_c tương ứng là độ dài các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A,B,C của tam giác đó. Chứng minh rằng $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Nghiên cứu, suy nghĩ học sinh mở rộng bài toán trong không gian

Bài toán: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $a_i(i=\overline{1;6})$ là độ dài các cạnh và m_a,m_b,m_c

m_d là độ dài các đường trọng tuyến của tứ diện đó. Chứng minh rằng

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2=\frac{4}{9}(\sum_{i=1}^{6}a_i^2)$$

Áp dụng kết quả ở ví dụ 1 vào các tam giác thích hợp và công thức đường trung tuyến, học sinh sẽ có lời giải cho bài toán.

Ví dụ 6: Từ bài toán trong mặt phẳng

Cho hai tam giác $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$. Gọi G,G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác đó. Chứng minh rằng: $GG' \le \frac{1}{3}(AA'+BB'+CC')$.

Học sinh mở rộng bài toán trên trong không gian

Bài toán: Cho hai tứ diện $ABCD, A'B'C'D'$ ở vị trí bất kì trong không gian. Gọi G,G' lần lượt là trong tâm của chúng. Chứng minh rằng:

$GG' \le \frac{1}{4}(AA'+BB'+CC'+DD')$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

Tương tự như trong phẳng, sử dụng phương pháp vectơ, học sinh sẽ thu được lời giải cho bài toán.

3.3. Hoạt động 3: Chuyên đề chuyên sâu: Tập sáng tác bài toán mới

Trong chương trình Đại số và Giải tích lớp 12, khi học về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số, các nhóm học sinh có thể đi sâu vào việc nghiên cứu, để có thể sáng tác các bài toán mới về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức nhiều biến.

Ví dụ 7: Từ bài toán:

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{1}{3-x}+\frac{1}{x}$ trên khoảng $(0;3)$

Học sinh dễ dàng xác định cách làm:

+) Ta có $f'(x)=\frac{1}{(3-x)^2}-\frac{1}{x^2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

+) Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0;3) \Rightarrow \min\limits_{x\in(0;2)} f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{3}$.

Sau khi học sinh giải quyết xong bài toán, giáo viên đề nghị học sinh hãy sáng tác bài toán mới là đi tìm giá trị nhỏ nhất của một biểu thức hai biến:

+) Trước hết, đặt $x=ab$ với $a,b>0; a+b=3$, ta có $a^3+b^3=(a+b)^3-3(a+b)ab=27-9ab=9(3-ab)$

Và $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}=\frac{9}{4}$ khi đó:

$$f(x)=\frac{1}{3-x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3-ab}+\frac{1}{ab}=\frac{9}{a^3+b^3}+\frac{1}{ab}=P$$

Từ đó, học sinh có bài toán mới:

Bài toán: Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $a+b=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{9}{a^3+b^3}+\frac{1}{ab}$

Ví dụ 8: Từ bài toán:

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=-x^3+3.x$ trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$.

Đây là bài toán quen thuộc, không khó để học sinh có thể giải quyết bài toán này

+) $f'(x)=-3.x^2+3$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$;

+) $f(\pm\sqrt{3})=0; f(-1)=-2; f(1)=2$ do đó

$\max\limits_{x\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} f(x)=f(1)=2$; $\min\limits_{x\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} f(x)=f(-1)=-2$

Đến đây, bằng cách suy nghĩ tương tự, giáo viên khuyến khích học sinh tiếp tục suy nghĩ để tìm bài toán mới. Từ bài toán là hàm số bậc 3, học sinh có thể nghĩ đến bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức 3 biến.

Đặt $x=a+b+c$ với điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$ ta có

$$-x^3+3.x=-(a+b+c)^3+3(a+b+c)=(a+b+c).\left[3-(a+b+c)^2\right]$$

$$=(a+b+c).\left[3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2\right]$$

$$=2(a^3+b^3+c^3-3abc)=2P$$

Mặt khác:

$$x^2=(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)=3 \Rightarrow -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$$

(Xem tiếp trang 48)