TƯ DUY THUẬT GIẢI TRONG GIẢNG DẠY TOÁN CAO CẤP CHO SINH VIÊN CAO ĐẲNG KĨ THUẬT

PGS.TS. NGUYỄN THỊ LAN PHƯƠNG
Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam
ThS. NGUYỄN ĐỨC THÀNH
Trường Cao đẳng nghề Kĩ thuật Công nghiệp Việt Nam - Hàn Quốc, TP. Vinh - Nghệ An

1. Đặt vấn đề

Thuật giải (còn gọi là thuật toán) (*Algoritthm*) là một dãy các quy tắc để thực hiện một dãy các thao tác trên một đối tượng nhất định đảm bảo sao cho sau hữu hạn bước thực hiện các thao tác đó sẽ đạt được mục tiêu ban đầu.

Tư duy thuật giải (*Algoritthmic thinking*) là loại tư duy luôn tuân theo một quy trình gồm ba thao tác là: 1/ Xây dựng giải pháp cho vấn đề; 2/ Chứng minh tính đúng đắn của giải pháp; 3/ Phân tích sự phức tạp của giải pháp đó. Điều này góp phần như một giá trị sư phạm mà Knuth nhấn mạnh *"... một người không thực sự hiểu điều gì đó cho đến khi anh ta dạy nó hoặc chứng minh tính đúng đắn của nó cho người khác, tức là thể hiện nó như là thuật toán"*.

Knuth D.E, Maurer S.B, Ralston A. [2] và Engel A. [3],... đã chỉ ra sáu đặc điểm chung giữa tư duy thuật giải và tư duy toán học (*Mathematical thinking*) là: 1/ Thao tác qua các công thức; 2/ Tư duy qua phần tử đại diện; 3/ Có thể đơn giản hóa các vấn đề phức tạp; 4/ có thể trừu xuất hóa ý tưởng; 5/ Cả hai đều tư duy theo cấu trúc thông tin; 6/ Mô tả dãy thao tác cho một lớp vấn đề của thực tiễn. Còn đặc điểm khác biệt giữa chúng là trong khi tư duy toán học hướng tới khái quát hóa và sự vô cùng, tư duy thuật giải luôn chi tiết hóa từng thao tác.

Judith Gal-Ezer và Orna Lichtenstein [4] đã nêu cách sử dụng tư duy thuật giải vào quá trình giảng dạy khái niệm toán học: 1/ Giới thiệu chủ đề trong chương trình toán học; 2/ Thảo luận về chủ đề để đưa ra câu hỏi/vấn đề nghiên cứu; 3/ Tìm câu trả lời/giải pháp cho câu hỏi/vấn đề đó. Ví dụ:

Bước 1: Tạo tình huống tiếp cận khái niệm mới *"tập hợp tối thiểu chứa tập hợp khác"*: cho tập hợp *S* được định nghĩa bởi 3 tiên đề sau:

$$S=\left\{\begin{array}{l}\text{A1: } 0\in S;\\ \text{A2: } x\in S\rightarrow 2x+1\in S \text{ và } 3x+1\in S;\\ \text{A3: S là tập hợp tối thiểu chứa A1 và A2}\end{array}\right\}$$

Bước 2: Sinh viên thảo luận (nhóm, cặp hoặc toàn thể) để chỉ ra vấn đề: có vô số tập hợp thỏa mãn hai tiên đề đầu (dễ dàng chứng minh ở các tập hợp N, Z, N–{2},...), nhưng *"có một và chỉ một tập hợp thỏa mãn tiên đề thứ ba"*.

Bước 3: Hướng dẫn sinh viên xây dựng khái niệm *"tập hợp tối thiểu chứa tập hợp khác"*, rồi tìm kiếm và chứng minh sự tồn tại của nó bằng suy diễn toán học. Có thể cho họ trải nghiệm khám phá theo hướng mở rộng thành các vấn đề sâu sắc hơn, chẳng hạn như *"Điều gì sẽ xảy ra nếu thay đổi tiên đề A2 của tập hợp S:*

$$S=\left\{\begin{array}{l}\text{A1: } 0\in S;\\ \text{A2: } x\in S\rightarrow f(x)\in S \text{ và } g(x)\in S;\\ \text{A3: S là tập hợp tối thiểu chứa A1 và A2}\end{array}\right\}$$

Tương tự như Judith Gal-Ezer và Orna Lichtenstein, Nguyễn Bá Kim [5] đã chỉ ra năm hoạt động giảng dạy toán học có sử dụng tư duy thuật giải, đó là: 1/ Thực hành quy trình cho một nhiệm vụ; 2/ Phân chia tổng thể thành các thành phần và sắp xếp lại theo logic mới; 3/ Mô tả một số hữu hạn bước theo trình tự nhất định; 4/ Khái quát hóa cách giải của bài toán cụ thể cho một lớp các bài toán; 5/ Phân tích, đánh giá để lựa chọn giải pháp tối ưu. Trong đó, hoạt động thứ nhất là thực hiện thuật giải và bốn hoạt động sau là xây dựng thuật giải. Vì thế, ông cho rằng với bối cảnh dạy học toán, có thể xem tư duy thuật giải là một kiểu tư duy toán học.

Trong quá trình lao động sản xuất, các công nhân kĩ thuật luôn phải phân tích, lựa chọn các quy trình hoạt động, thực hiện các thao tác theo quy trình nhất định, tức là họ luôn phải có tư duy thuật giải. Vì vậy, việc rèn luyện thói quen, ý thức và khả năng thực hiện thuật giải cho sinh viên cao đẳng kĩ thuật là một nhiệm vụ cần thiết trong quá trình đào tạo nghề nghiệp.

2. Sử dụng tư duy thuật giải khi dạy Toán cao cấp cho sinh viên cao đẳng kĩ thuật

Cách tích hợp tư duy thuật giải vào giảng dạy một chủ đề của chương trình Toán cao cấp được thực hiện theo quy trình: 1/ Giảng viên tạo tình huống nảy sinh/xuất hiện khái niệm/quy trình mới; 2/ Sinh viên thảo luận để phân tích khái niệm/quy trình đó và trình bày cách thức thiết lập hoặc vận dụng khái niệm/quy trình mới. Chủ đề "Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất" được xem là ví dụ minh họa cho ý tưởng này.

Cũng cần giải thích thêm rằng, bài viết này không phải là xây dựng một đơn vị học trình hay thiết kế một kế hoạch bài giảng. Điều này có nghĩa, chúng tôi chỉ trình bày vắn tắt khái niệm, quy trình toán học, hướng dẫn cách nêu câu hỏi hoặc vấn đề khuyến khích tư duy, không nhất thiết phải cung cấp chi tiết cho từng giải pháp.

Bước 1: Tạo tình huống thực tiễn

Giảng viên có thể tạo ra sự chú ý của sinh viên bằng câu hỏi: *Những tình huống thực tiễn nào đòi hỏi phải tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất?* Hi vọng rằng, sinh viên sẽ thảo luận cùng nhau để chỉ ra một loạt tình huống như tìm đường đi ngắn nhất, vị trí có góc nhìn lớn nhất, thời gian "dừng" trong băng chuyền sản xuất ít nhất, tổng chi phí sản xuất ít nhất mà sản phẩm có chất lượng nhất, tổng lợi nhuận cao nhất, thể tích lớn nhất, diện tích vật liệu ít nhất,... trong đời sống hàng ngày cũng như trong sản xuất.

Ở bước này, nên trao đổi với sinh viên về tiến trình giảng dạy và học tập chủ đề "Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất" [6], [7]: bắt đầu từ những bài toán cực trị hàm một biến giải bằng nguyên lí Fermat và định lí tồn tại Weierstrass; sau đó chuyển sang các bài toán cực trị của hàm nhiều biến bằng phương pháp khử dần để đưa về trường hợp một biến; tiếp đến là bài toán cực trị có điều kiện;...

Bước 2: Phân tích khái niệm "Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm 1 biến"

Với nguyên lí Fermat *"Nếu hàm số f khả vi thì mỗi điểm cực tiểu (cực đại) địa phương của nó đều là điểm dừng, tức là là nghiệm của phương trình f'(x) = 0"*, nên dành thời gian để sinh viên "chứng tỏ điều ngược lại không đúng" bằng cách đưa ra các phản ví dụ. Nếu họ không làm được, có thể đưa ví dụ "xét hàm số $y = x^3$ tại $x = 0$";

Với định lí tồn tại Weierstrass *"Một hàm số liên tục trên đoạn [a, b] sẽ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đó"*, yêu cầu sinh viên "thảo luận về định lí và trình bày thuật toán để áp dụng nó" theo tiến trình:

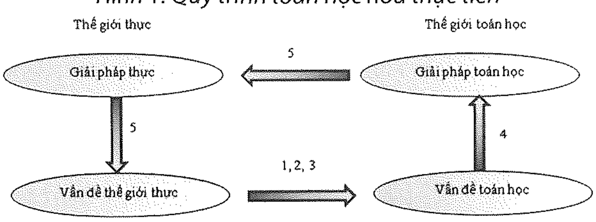
- Hướng dẫn phân tích định lí bằng phương pháp hình học;
- Sử dụng nguyên lí và định lí trên để thấy rằng: giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục, khả vi trên đoạn [a, b] tồn tại và cần tìm chúng tại các điểm dừng và tại hai đầu mút a, b;
- Đề xuất thuật giải "tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một khoảng đóng" gồm 4 bước sau: 1/ Tính f (a), f (b); 2/ Tìm giá trị của f tại các điểm hàm số không khả vi; 3/ Tìm giá trị của f tại các điểm đạo hàm bằng 0; 4/ So sánh các giá trị f tìm được ở ba bước trên.

Bước 3: Vận dụng thuật giải "tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một khoảng đóng"

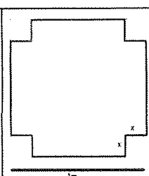
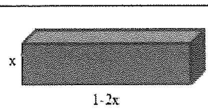
Nhiệm vụ 1: Một miếng thép hình vuông có cạnh là 1m. Người ta muốn làm từ đó một hình hộp không nắp bằng cách cắt ở bốn góc các hình vuông có cạnh *x* rồi gấp lên và hàn lại. Vậy *x* bằng bao nhiêu để thể tích hình hộp là lớn nhất?

Nhiệm vụ này có thể được thực hiện theo thuật giải "Toán học hóa thực tiễn" của Polya: 1/ Tìm hiểu vấn đề thực tiễn; 2/ Tổ chức vấn đề thực tiễn theo các khái niệm toán học; 3/ Chuyển sang vấn đề toán học; 4/ Tìm giải pháp cho vấn đề toán học; 5/ Chuyển ý nghĩa của giải pháp toán học về thực tiễn (xem hình 1).

Hình 1: Quy trình toán học hóa thực tiễn



Có thể mô tả kết quả quá trình tư duy của sinh viên như sau:

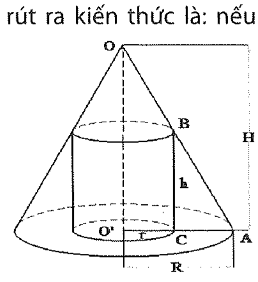
1/ Tìm hiểu vấn đề thực tiễn	
2/ Tổ chức vấn đề theo khái niệm toán học	
3/ Chuyển sang vấn đề toán học	Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $V(x) = x(1-2x)^2$, với $0 \le x \le \frac{1}{2}$
4/ Giải quyết vấn đề toán học: Tính V tại hai đầu mút Tìm V tại điểm không khả vi Tìm V tại các điểm đạo hàm bằng 0 So sánh các giá trị của V	$V(0) = 0;\ V(\frac{1}{2}) = 0;$ Hàm số V khả vi với $0 \le x \le \frac{1}{2}$ $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ và $x = \frac{1}{6}$; và $V(\frac{1}{6}) = \frac{2}{17}$ $\Rightarrow V_{max} = \frac{2}{17}$ khi $x = \frac{1}{6}$.
5/ Chuyển ý nghĩa của giải pháp toán học về thực tiễn	Cạnh hình vuông cần cắt là $x = \frac{1}{6}$ thì hình hộp tạo thành sẽ có thể tích lớn nhất.

Nhiệm vụ 2: Giải quyết vấn đề mở rộng, chẳng hạn như miếng thép đã cho có hình chữ nhật, giải bài toán 1 bằng phương pháp bất đẳng thức,...

Nhiệm vụ 3: Trong một cái phiễu hình nón có bán kính đáy R và đường cao H người ta lồng vào một hình trụ có bán kính đáy r và đường cao h như hình vẽ. Tìm bán kính *r*, chiều cao *h* của hình trụ có thể tích lớn nhất?

Theo thuật giải "Toán học hóa thực tiễn" nêu trên:

- Kết quả của các bước 1, 2, 3 là sinh viên sẽ đưa ra một vấn đề toán học: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số 2 biến $V = \pi r^2 h$, với $0 \le r \le R$ và $0 \le h \le H$.
- Ở bước 4, sinh viên đưa ra giải pháp "khử dần biến để đưa về bài toán cực trị hàm 1 biến" bằng cách [8]: suy diễn $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R} \Rightarrow h = \frac{H}{R}(R-r) \ \Rightarrow\ V = \pi r^2 \frac{H}{R}(R-r)$, với $0 \le r \le R$; và vận dụng thuật giải "Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một khoảng đóng". Từ đó, V có giá trị lớn nhất là $V(\frac{2}{3}R) = \frac{4}{27}\pi R^2 H.$
- Ở bước 5, sinh viên cần rút ra kiến thức là: nếu bán kính $r = \frac{2}{3}R$, đường cao $h = \frac{1}{3}H$ thì hình trụ sẽ có thể tích lớn nhất.



Có thể thấy, khi giải quyết các nhiệm vụ trên, sinh viên đã kết hợp hai thuật giải là "Toán

(Xem tiếp trang 21)