

SỬ DỤNG BIỂU DIỄN TOÁN HỌC TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN LỚP 6 VÀ LỚP 7

ThS. VŨ THỊ BÌNH

Trường Cao đẳng Sư phạm Lào Cai

1. Quan niệm về biểu diễn toán học trong môn Toán ở trường phổ thông

Theo Chương trình đánh giá học sinh quốc tế (PISA), năng lực toán học phổ thông (Mathematical literacy) gồm nhiều năng lực thành phần mà biểu diễn (Representation) là một năng lực cơ bản và quan trọng. Biểu diễn bao gồm đồ thị, bảng, biểu đồ, tranh ảnh, sơ đồ, văn bản cũng như các biểu diễn đại số và các biểu diễn kí hiệu toán học khác. Trung tâm của năng lực này là khả năng hiểu và sử dụng các mối quan hệ qua lại giữa các biểu diễn khác nhau. ([5], tr. 33)

Theo Hiệp hội quốc gia các giáo viên toán (The Nation Council of Teachers of Mathematics, gọi tắt là NCTM), biểu diễn có thể hiểu là một tổ chức các hình ảnh, kí hiệu (dấu hiệu trên giấy, hình vẽ, sơ đồ, biểu đồ, đồ thị, phác thảo hình học, các phương trình). Biểu diễn là một công cụ mạnh để khám phá các mệnh đề toán học, cho phép học sinh (HS) trao đổi các cách tiếp cận bài toán, các lập luận và việc hiểu của các em; giúp HS nhận thấy ý nghĩa của các khái niệm toán học và mối quan hệ giữa chúng; áp dụng toán vào những vấn đề thực tế (NCTM, 2000 - dẫn theo [8] tr. 16).

Một số tác giả trong nghiên cứu, đào tạo về giáo dục toán học phổ thông, tuy không chính thức dùng thuật ngữ biểu diễn theo quan niệm của PISA hay NCTM nhưng đã có những quan tâm rất đáng chú ý để sử dụng chúng một cách hiệu quả trong dạy học môn Toán. Các tác giả Hoàng Chúng, Hà Sĩ Hổ, Nguyễn Bá Kim quan tâm tới ngôn ngữ toán học được hiểu không chỉ gồm các thuật ngữ, kí hiệu toán học mà còn mở rộng tới các loại ngôn ngữ sơ đồ, đồ thị, hình ảnh, tranh vẽ... và đã nhấn mạnh tới việc cần rèn luyện cho HS nắm vững, sử dụng và phiên dịch chúng sang ngôn ngữ kí hiệu toán học và ngôn ngữ tự nhiên (dẫn theo [3]).

Trong bài viết này, thuật ngữ biểu diễn toán học (BDTH) nói tới khái niệm biểu diễn trong môn Toán phổ thông như PISA, NCTM và một số tác giả đã dùng. Như vậy, BDTH bao gồm: biểu diễn đại số (các biểu thức đại số, các công thức đại số, kí hiệu...); các thuật ngữ toán học (chẳng hạn, ước số chung, tia số, tập hợp...); các sơ đồ, hình vẽ, biểu bảng... biểu thị đối tượng, hay một quan hệ toán học nào đó.

2. Vai trò của bồi dưỡng toán học trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông

Nhà nghiên cứu Hoa Kỳ Jerome Bruner khi nghiên cứu nhận thức toán học của trẻ em và tư duy có tính

biểu diễn đã chỉ ra rằng, có thể chia biểu diễn thành ba phạm trù từ thấp đến cao: *Thực tế* (gồm các biểu diễn thực tế ở mức độ thấp nhất và các biểu diễn thao tác được); *Biểu tượng* (các biểu diễn trực quan sử dụng các hình ảnh, đồ thị, sơ đồ, biểu bảng...); *Kí hiệu* (gồm các biểu diễn ngôn ngữ và biểu diễn kí hiệu). Trong đó, biểu diễn trực quan đóng vai trò trung gian kết nối biểu diễn thực tế với biểu diễn kí hiệu (dẫn theo [7]). Điều đó cho thấy J. Bruner đã quan tâm đến ngôn ngữ toán học nói chung và BDTH nói riêng như là một nội dung quan trọng trong dạy và học toán.

NCTM cũng khẳng định dạy BDTH là một tiêu chuẩn của dạy học toán phổ thông, được hình thành cho HS qua chương trình giảng dạy từ mầm non đến lớp 12. Biểu diễn không chỉ gắn với tiến trình phát triển trí tuệ (nhận thức) mà còn để trao đổi thông tin về nội dung toán học mà nó đại diện. Do đó, biểu diễn cũng đòi hỏi phải tuân theo những quy ước chung, được thống nhất trong cộng đồng sử dụng (biểu diễn tiêu chuẩn). Ngoài ra, HS và cả giáo viên (GV) có thể tự đặt ra biểu diễn không theo quy ước để phản ánh nhận thức toán học, để trao đổi (giao tiếp) với nhau và để ghi lại thông tin cho chính mình (biểu diễn không tiêu chuẩn). Việc tạo nhiều cơ hội cho HS sử dụng BDTH trong giải toán có ý nghĩa quan trọng trong việc phát triển mô hình hóa các hiện tượng tự nhiên, xã hội hoặc toán học. Qua đó, HS thấy được hiệu quả của các dạng biểu diễn quy ước cũng như vai trò của biểu diễn trong học tập và giao tiếp toán học.

3. Các dạng biểu diễn toán học trong Sách giáo khoa Toán 6 và Toán 7 hiện hành

Trong SGK môn Toán lớp 6, lớp 7 hiện nay, BDTH thường bao gồm: các tranh vẽ, hình vẽ, bảng, biểu đồ, sơ đồ, đồ thị; các thuật ngữ, kí hiệu về số, các phép toán, các quan hệ trong các tập hợp số, biểu thức, hàm số; các kí hiệu của lí thuyết tập hợp, của thống kê mô tả; hệ thống các kí hiệu về đối tượng và quan hệ hình học phẳng. Cụ thể như sau:

- *Tranh vẽ (ảnh)* là những tranh vẽ (ảnh) gắn với thực tiễn có chứa đựng yếu tố toán học, nhằm kích thích, gây tò mò, hứng thú cho người học. Có tất cả 140 tranh vẽ, với 54 tranh trong SGK Toán 6 và 86 tranh trong SGK Toán 7;

- *Hình vẽ* là những hình biểu diễn minh họa cho quan hệ của các số, các phép tính, các đối tượng và quan hệ hình học như: trục số, tia số, các hình hình học,... Trong SGK Toán 6,7 có 361 hình được sử dụng;

- *Sơ đồ* là sự mô tả có tính gợi ý, định hướng, chỉ dẫn theo một thứ tự, quy trình. Có tất cả 19 sơ đồ (lớp 6: 16, lớp 7: 3). Chủ yếu là sơ đồ biểu thị việc biến đổi phân số;

- *Biểu đồ* là một dạng hình minh họa, biểu thị quan hệ so sánh về số lượng hay tỉ lệ (biểu đồ Ven, biểu đồ cột, chữ nhật, quạt). Có 21 biểu đồ trong SGK Toán lớp 6, 7;

- *Bảng*: chủ yếu là các bảng chữ nhật giúp HS thấy được mối quan hệ của các số giữa các hàng/cột trong bảng; một số bảng tổng kết, tóm tắt, hệ thống hóa hoặc phân loại kiến thức, bảng ô chữ... Có 158 bảng được sử dụng trong SGK Toán 6,7 (90 bảng ở lớp 6 và 68 bảng ở lớp 7). Nếu xem việc biểu diễn giả thiết, kết luận của một định lí/bài tập hình học như là một bảng tóm tắt, trong SGK Hình học 7 còn sử dụng 8 bảng dạng này.

- *Đồ thị*: Có 16 đồ thị trong SGK Toán 7 được sử dụng khi giới thiệu về hàm số và đồ thị.

Như vậy, ngoài các BDTH dưới dạng các kí hiệu, thuật ngữ toán học, trong SGK Toán lớp 6,7 các tranh vẽ (ảnh), hình vẽ, sơ đồ, bảng, biểu đồ... đã xuất hiện khá phong phú, đa dạng với tổng số 723 biểu diễn được sử dụng (lớp 6 có 319 và lớp 7 có 404), nội dung thường gắn với việc khai thác những yếu tố thực tiễn. Đồng thời, cần thể hiện được sự nhất quán và hợp lí trong hình thành kiến thức mới cũng như trong quá trình củng cố, luyện tập. Có thể nói, BDTH đã được quan tâm cả về mặt nội dung và hình thức biểu đạt theo hướng giúp HS thấy rõ hơn mối liên quan giữa nội dung toán học với thế giới bên ngoài và với các môn học khác.

4. Một số hướng khai thác sử dụng bồi dưỡng toán học nhằm nâng cao hiệu quả dạy học môn Toán ở lớp 6 và lớp 7

Trong bối cảnh đổi mới chương trình, sách giáo khoa 2015 theo hướng thiết thực, hiệu quả, cần nhận thức đầy đủ hơn về vai trò và tầm quan trọng của BDTH trong quá trình dạy học môn Toán. Cần khai thác triệt để các BDTH trong SGK; tạo nhiều cơ hội để HS sử dụng các cách biểu diễn khác nhau (theo quy ước hoặc không) trong học toán, nâng cao hiệu quả dạy và học.

Việc khai thác BDTH trong dạy học Toán 6, 7 hiện nay có thể theo các hướng như sau:

1/ Số học, đại số: Nội dung số học và đại số lớp 6, lớp 7 có sự kế thừa, tiếp nối những nội dung số học đã học ở Tiểu học. Do vậy, có thể nói tính trình tự về biểu diễn mà Trần Vui (2009) nhắc đến: Thực tế → Trực quan → Kí hiệu theo quá trình nhận thức như Bruner cần được hiểu trong bối cảnh của hệ thống kiến thức từ Tiểu học và khai thác vận dụng một cách linh hoạt, sáng tạo, phù hợp trong những nội dung toán học cụ thể.

Ví dụ 1: Khi dạy học thành phép trừ hai số tự

nhiên (Toán 6, tập 1, tr.22):

(*) GV đưa ra tình huống: Xét xem có số tự nhiên x nào mà:

$2 + x = 5$ hay không?

$6 + x = 5$ hay không?

Ở câu a, HS dễ dàng tìm được: $x = 3$.

Ở câu b, HS không tìm được số tự nhiên x.

(*) GV nhận xét:

Với hai số tự nhiên 5 và 2, ta tìm được số tự nhiên $x = 3$ mà: $2 + 3 = 5$.

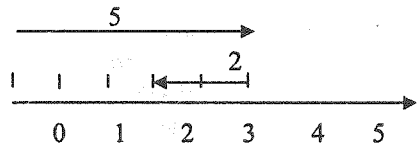
Vậy ta có phép trừ: $5 - 2 = 3$.

Với hai số tự nhiên 5 và 6, ta không tìm được số tự nhiên x nào để: $6 + x = 5$ nên không có phép trừ $5 - 6$.

Từ đó, GV đưa ra khái niệm: "Cho hai số tự nhiên a và b, nếu có số tự nhiên x sao cho $b + x = a$ thì ta có phép trừ $a - b = x$ " (Toán 6, tập 1, trang 21),

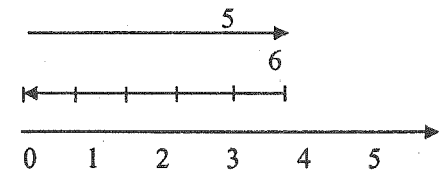
(*) GV giới thiệu cách xác định hiệu của hai số tự nhiên bằng tia số

GV làm mẫu cho HS quan sát: vẽ tia số; dùng phấn màu, đặt ở điểm 0, di chuyển trên tia số 5 đơn vị theo chiều mũi tên; di chuyển phấn màu theo chiều ngược lại 2 đơn vị. Phấn chỉ điểm 3, là kết quả của $5 - 2$ (hình vẽ).



HS quan sát cách GV biểu diễn, sau đó bằng cách tương tự, HS xác định kết quả của $7 - 3$ bằng tia số; HS mô tả lại quá trình biểu diễn đó bằng lời (ngôn ngữ của bản thân);

HS tiếp tục theo cách trên để tìm hiệu của $5 - 6$ và giải thích (5 không trừ được 6 vì khi di chuyển bút từ điểm 5 theo ngược chiều mũi tên 6 đơn vị thì vượt ra ngoài tia số (như hình 16 – Toán 6, tập 1, tr. 21).



Trong bài này, việc sử dụng biểu diễn trực quan (phép trừ bằng tia số) được giới thiệu cho HS sau biểu diễn ngôn ngữ và biểu diễn kí hiệu. Ta đã biết, phép trừ số tự nhiên được hình thành ở Tiểu học, với lớp 6 chỉ là ôn tập. Cách biểu diễn phép trừ bằng tia số nhằm giúp HS học cách thực hiện trừ hai số tự nhiên trên tia số; hiểu rõ khi nào kết quả của phép trừ hai số tự nhiên là một số tự nhiên và nắm vững quan hệ giữa các thành phần trong phép trừ. Trong trường hợp này, biểu diễn kí hiệu (ngôn ngữ và kí hiệu) khá gần gũi, quen thuộc với HS (vì đã học ở Tiểu học), nhưng biểu

diễn trực quan lại có ý nghĩa mới, vừa là sự cụ thể hóa phát biểu ngôn ngữ nói trên vừa là đối tượng toán học cần nhận thức. HS có thể hiểu tốt về phép trừ hai số tự nhiên nhưng thể hiện trên tia số là không dễ dàng. Vì vậy, GV cần đặc biệt quan tâm trong việc dạy HS sử dụng các biểu diễn trực quan có vai trò “kép” dạng này trong dạy học toán.

Một thử nghiệm nhỏ được thực hiện trên hai lớp 6B và 6C Trường Trung học cơ sở Kim Tân, thành phố Lào Cai (tháng 10/2014). Tại lớp 6B cho thấy, khi GV thực hiện làm mẫu và yêu cầu HS làm như trong ví dụ 1, kết quả: 39/45 HS (86,6%) có thể đọc thành thạo các hình 14, 15, 16 (Toán 6, tập 1, tr.21) và 35/45 (77,7%) HS có thể biểu diễn phép trừ hai số tự nhiên bằng tia số. Tại lớp 6C, GV chỉ mô tả và giới thiệu như SGK: “Hình 14 cho thấy $5 - 2 = 3$; hình 15 cho thấy $7 - 3 = 4$; hình 16 cho thấy không có hiệu $5 - 6$ trong phạm vi số tự nhiên” thì có đến 69,6% (32/46) HS không “đọc” được các hình 14, 15, 16. Và 86,9% (40/46) HS không biết dùng tia số để tìm hiệu hai số tự nhiên. Điều này dẫn đến việc HS sẽ rất khó khăn khi hình thành phép tính cộng, trừ các số nguyên gắn với việc sử dụng trực số làm công cụ biểu diễn trực quan.

2/ Thống kê: Cần lưu ý, việc hình thành các khái niệm và quy tắc về thống kê mô tả trong chương 3 (Toán 7, tập 2) luôn thông qua các ví dụ thực tế, dưới dạng các bảng số liệu. Biểu diễn trực quan (các dạng bảng, biểu đồ,..) lúc này vừa là đối tượng cần nhận thức vừa là phương tiện để HS thể hiện khả năng BDTH của mình một cách linh hoạt, sáng tạo.

3/ Hình học: Hình học ở lớp 6, 7 được SGK trình bày theo kiểu tiếp cận quy nạp, từ quan sát, thử nghiệm, đo, vẽ, nêu nhận xét và đi đến kiến thức mới. HS nhận thức các đối tượng hình học và các quan hệ hình học bằng mô tả trực quan với sự hỗ trợ của trực giác, tưởng tượng. Bởi vậy, Hình học lớp 6, 7 thể hiện khá rõ các dạng biểu diễn: thực tế - trực quan - kí hiệu.

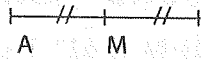
Trong dạy học hình học ở Trung học cơ sở, hình vẽ là cầu nối, là điểm tựa cho hình học trừu tượng. HS cần hình vẽ để hình dung đối tượng hình học cũng như cần các thao tác hình học (đo, cắt, gấp, vẽ,...), các hình ảnh thực tế và những mô tả bằng từ ngữ. Do vậy, dù SGK lớp 6, lớp 7 đã dùng nhiều cách biểu diễn (thực tế, trực quan, kí hiệu)...vẫn chú ý “khôn lại” các sự kiện hình học bằng ngôn ngữ (kể cả ngôn ngữ thể hiện liên kết logic và ngôn ngữ thể hiện đối tượng hình học như điểm, đường thẳng...) Như vậy, có thể nói, BDTH khi đối tượng toán học là hình học cũng là vấn đề sự phạm không đơn giản. Ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Dạy học trung điểm của đoạn thẳng.

Ta có thể thấy BDTH trong SGK thể hiện như sau:
Biểu diễn trực quan:

Hình ảnh chiếc cân đĩa ở vị trí cân bằng (SGK Toán 6, tập 1, tr. 124) minh họa cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Hình vẽ:



Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Biểu diễn kí hiệu:

Bằng ngôn ngữ: Trung điểm M của đoạn thẳng AB là điểm nằm giữa A, B và cách đều A, B ($MA = MB$). Hay, trung điểm của đoạn thẳng AB là điểm chính giữa của đoạn thẳng AB

Bằng kí hiệu: M là trung điểm của

$$AB \Leftrightarrow \begin{cases} MA + MB = AB \\ MA = MB \end{cases}$$

- Một số biểu diễn thao tác được (thực tế):
Xác định trung điểm M của đoạn AB cho trước.

(i) Cách 1:

- Đo đoạn AB;

- Tính độ dài $AB/2$;

- Dùng thước đo đoạn thẳng để xác định vị trí M trên đoạn AB, sao cho: $AM = AB/2$;

(ii) Cách 2: Dùng cách gấp giấy để xác định trung điểm M của AB;

(iii) Cách 3: Dùng dây đo đoạn thẳng AB, gấp đôi đoạn dây tương ứng với đoạn AB vừa đo được và dùng bút đánh dấu vị trí trung điểm, từ đó xác định được trung điểm M của đoạn AB.

Mỗi cách nói trên là một phương pháp giải quyết, thể hiện việc sử dụng các dạng biểu diễn thực tế (thao tác được) cho trung điểm của một đoạn thẳng bằng các công cụ, phương tiện khác nhau. Ở đây, hình vẽ cái cân với kim cân bằng ở SGK trong bài “Tia phân giác một góc” (Toán 6 tập 2 tr. 85) và bài “Trung điểm của đoạn thẳng” (SGK Toán 6, tập 1 tr. 124) đều là “hình ảnh trực quan ban đầu cho các khái niệm hình học”. Với hình học các lớp 6, lớp 7, cần chú ý bước chuyển từ hình ảnh vật thật (ảnh cái cân thật, không phải cái cân đã được họa sĩ vẽ ước lệ cho SGK) → hình ảnh thay thế (hình vẽ cái cân dùng cho dạy học) → hình vẽ tượng trưng. Hình vẽ ở đây vừa mang ý nghĩa một biểu diễn trực quan, vừa là biểu diễn kí hiệu bởi chính những hình này (hình vẽ trung điểm của đoạn thẳng hay tia phân giác của góc) cũng là các đối tượng toán học, là một dạng kí hiệu về đối tượng hình học.

5. Hướng sử dụng biểu diễn toán học trong dạy học môn Toán đầu cấp Trung học cơ sở trong thời gian sắp tới

Có thể nói, dù biểu hiện tường minh hay ẩn tàng, theo trình tự nhận thức: Thực tế - Biểu tượng - Kí hiệu hay có sự thay đổi, SGK Toán lớp 6, 7 hiện nay cũng đã thể hiện khá rõ nét ý tưởng của việc hình thành, rèn luyện và phát triển ngôn ngữ toán học cho HS. Đặc biệt là những ý tưởng về BDTH. Biểu diễn không chỉ là để minh họa mà còn hỗ trợ trong tư duy. Việc

(Xem tiếp trang 46)