MỘT SỐ BIỆN PHÁP GÓP PHẦN RÈN LUYỆN CÁC THAO TÁC TƯ DUY CHO HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG TRONG DẠY HỌC ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

ThS. NGUYỄN THỊ MỸ HẰNG
Đại học Vinh
PGS.TS. TRẦN KIỀU
Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam

1. Mở đầu

Quá trình tư duy bao gồm nhiều giai đoạn, tính giai đoạn của quá trình tư duy phản ánh mặt bên ngoài, cấu trúc bên ngoài của tư duy, còn nội dung bên trong mỗi giai đoạn của quá trình tư duy là một quá trình phức tạp, diễn ra qua ***thao tác tư duy***.

Xét về bản chất, tư duy là một quá trình nhận thức của cá nhân và cũng là quá trình thực hiện các thao tác tư duy để đạt được nhiệm vụ đặt ra. Nói con người đang tư duy chính là muốn nói con người đang thực hiện các thao tác tư duy.

Thao tác tư duy *là một hành động tư duy có thể được tập luyện đến mức thuần thục.* Có các thao tác tư duy sau: *phân tích, tổng hợp, so sánh, tương tự hóa, trừu tượng hóa, khái quát hóa, đặc biệt hóa.* Xem xét tư duy từ bình diện hoạt động - hoạt động của một con người, thì có thể quan niệm hành động tư duy là một hành động tâm lí trọn vẹn tạo ra một kết quả mới chưa có trong kinh nghiệm của cá thể.

Một trong những mục đích chủ yếu của dạy học Toán là phát triển tư duy cho người học. Làm thế nào để thực hiện tốt mục đích đó luôn là một câu hỏi lớn cho người nghiên cứu và giáo viên. Trong bài viết này, chúng tôi xin nêu một vài biện pháp nhằm rèn luyện kĩ năng thực hiện các thao tác tư duy trong dạy học Toán ở trường trung học phổ thông.

2. Một số biện pháp sư phạm góp phần rèn luyện kĩ năng thực hiện các thao tác tư duy cho HS trong dạy học Đại số và Giải tích

2.1. Định hướng xây dựng và thực hiện biện pháp

- Các biện pháp phải góp phần rèn luyện các thao tư duy cho HS, đồng thời qua đó cũng góp phần quan trọng vào việc làm cho HS nắm vững các tri thức và kĩ năng của môn học;
- Các biện pháp phải khả thi, có thể thực hiện được trong điều kiện thực tế của quá trình dạy học;
- Các biện pháp được xây dựng căn cứ vào những khó khăn, những sai lầm phổ biến của HS khi học Đại số và Giải tích.

2.2. Một số biện pháp

Biện pháp 1: Trong dạy học cần chú ý việc dẫn dắt HS hiểu rõ nội hàm và ngoại diên, dấu hiệu đặc trưng của khái niệm toán học, đồng thời phân tích khả năng vận dụng các khái niệm đó vào việc giải quyết các vấn đề toán học

Mục đích: Giúp HS nắm vững thuộc tính bản chất trong số các thuộc tính của khái niệm, thấy được các ứng dụng của khái niệm, qua đó rèn luyện cho HS kĩ năng phân tích, tổng hợp.

- Cách thức thực hiện:
- Xem xét định nghĩa khái niệm một cách tổng quát;
- Xác định các thuộc tính của khái niệm, thuộc tính nào là thuộc tính bản chất, đặc trưng cho khái niệm; mối liên hệ giữa khái niệm đó với các khái niệm khác. Phân chia khái niệm thành các bộ phận theo từng dấu hiệu, thuộc tính;
- Nghiên cứu các tính chất của các bộ phận vừa phân tách; xác định mối liên hệ giữa các khái niệm bộ phận đó và với các khái niệm khác;
- Kết hợp các mối liên hệ thành một khái niệm hoàn chỉnh cùng với các tính chất của nó.

Ví dụ: (với chủ đề hàm số chẵn, hàm số lẻ).

- Xem xét định nghĩa khái niệm:

"Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D. Hàm số f gọi là hàm chẵn nếu với mọi x thuộc *D*, ta có $-x$ cũng thuộc *D* và $f(-x) = f(x)$. Hàm số f gọi là hàm lẻ nếu với mọi x thuộc *D*, ta có $-x$ cũng thuộc *D* và $f(-x) = -f(x)$."

- Yêu cầu HS chỉ ra các thuộc tính bản chất của khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ.

Thuộc tính bản chất của khái niệm hàm số chẵn là:

Thứ nhất, hàm số *f* chẵn trước hết phải là một hàm số, nghĩa là nó phải thỏa mãn điều kiện của một hàm số: mỗi $x \in D$ đều có giá trị tương ứng $f(x)$ và sự tương ứng đó là duy nhất. Thứ hai, tập xác định *D* của hàm số thỏa mãn với mỗi $x \in D$ *thì* $-x \in D$. Thứ ba là giá trị của hàm số tại x bằng giá trị của hàm số tại $-x$, với mọi $x \in D$, nghĩa là $f(x) = f(-x), \forall x \in D$.

Hội của các thuộc tính đó chính là thuộc tính đặc trưng của khái niệm hàm số chẵn. Bằng suy luận tương tự, HS sẽ chỉ ra được thuộc tính bản chất của khái niệm hàm số lẻ là:

Thứ nhất, hàm số *f* lẻ trước hết phải là một hàm số, nghĩa là nó phải thỏa mãn điều kiện của một hàm số: mỗi $x \in D$ đều có giá trị tương ứng $f(x)$ và sự tương ứng đó là duy nhất. Thứ hai, tập xác định *D* của hàm số thỏa mãn với mỗi $x \in D$ *thì* $-x \in D$ (tập hợp có tính chất này gọi là tập đối xứng). Thứ ba là giá trị của hàm số tại x bằng giá trị của hàm số tại $-x$, với mọi $x \in D$, nghĩa là $f(x) = -f(-x), \forall x \in D$.

Sau đó, giáo viên đưa ra các ví dụ thỏa mãn (hoặc không) các điều kiện trên. Điều đáng chú ý là nếu lấy các ví dụ không thỏa mãn điều kiện thứ nhất thì lúc đó không được gọi là hàm số mà gọi là quy tắc. Làm như vậy, HS một mặt hiểu được khái niệm hàm số chẵn, mặt khác củng cố được khái niệm hàm số. Giáo viên cũng đồng thời yêu cầu HS đưa ra các ví dụ tương tự và lưu ý HS là khi nhận dạng một quy tắc cho trước có phải là hàm số chẵn hoặc hàm số lẻ hay không, cần lần lượt kiểm tra ba điều kiện trên.

Thực tế cho thấy đa số HS chỉ quan tâm đến điều kiện thứ ba mà không kiểm tra hai điều kiện đầu. Chẳng hạn, các em cho rằng các quy tắc sau thỏa mãn các yêu cầu đối với một hàm số chẵn:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x^2-1}, & x \geq 2 \\ x^2, & x < 1 \end{cases} ; f:(-2;1) \to R.$$

$x \alpha \pm |x|$

Trong quá trình luyện tập khi gặp những bài toán tìm điều kiện của tham số để một hàm số nào đó là hàm số chẵn, HS thường chỉ suy ra điều kiện của tham số từ điều kiện $f(x) = -f(-x), \forall x \in D$. Chẳng hạn với bài toán: Tìm điều kiện của tham số *a* để hàm số $f(x) = \sqrt{3-a-x} + \sqrt{6+a+x}$ là hàm số chẵn. Nếu HS chỉ tập trung vào điều kiện $f(x) = -f(-x)$ thì sẽ gặp khó khăn trong việc tìm *a*, nhưng nếu dựa vào điều kiện thứ hai thì sẽ dễ dàng suy ra điều kiện cần của tham số *a*.

Như vậy, dựa vào tính chẵn lẻ trên tập *D*, có thể phân chia hàm số $y = f(x)$ (không phải hàm hằng) thành:

+) Hàm số chẵn trên *D;*

+) Hàm số lẻ trên *D;*

+) Hàm số không chẵn, không lẻ trên *D.*

Kiến thức này là rất cần thiết vì nhiều HS ngộ nhận rằng nếu hàm số không chẵn thì đó là hàm số lẻ và ngược lại.

- Nghiên cứu mối quan hệ giữa hàm số chẵn, hàm số lẻ với khái niệm đồ thị của hàm số, giáo viên có thể đặt câu hỏi như sau:

Giả sử hàm số f với tập xác định *D* là hàm số chẵn và có đồ thị (C). Với mỗi điểm $M(x_0; f(x_0))$ thuộc (C) thì suy ra điểm nào cũng thuộc (C)?

Câu trả lời mong đợi là điểm $M'(-x_0; f(x_0))$ cũng thuộc (C). Sau đó, có thể yêu cầu HS đưa ra nhận xét về vị trí của hai điểm $M(x_0; f(x_0))$ và $M'(-x_0; f(x_0))$?

Với cách dẫn dắt như vậy, HS sẽ rút ra được kết luận là: Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng, đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Các tính chất này có nhiều ứng dụng trong giải toán, đặc biệt là xác định số nghiệm của phương trình.

Biện pháp 2: Trong dạy học định lí cần làm rõ ý nghĩa của từng yếu tố được cho trong giả thiết; lưu ý đề cập khả năng vận dụng của định lí và đồng thời hình thành khả năng liên tưởng một bài toán với một định lí ăn khớp

Mục đích: Giúp HS nắm vững, hiểu rõ hơn về định lí, vận dụng được định lí trong những tình huống cụ thể, đồng thời rèn luyện thao tác phân tích - tổng hợp.

Cách thức thực hiện:

- Xác định cấu trúc lôgic của định lí;
- Xác định giả thiết, kết luận và nhấn mạnh giả thiết của định lí có cấu trúc hội hay tuyển;
- Làm cho HS hiểu được sự cần thiết của từng điều kiện có trong giả thiết bằng cách đưa ra một hệ thống phản ví dụ mà các điều kiện của giả thiết chưa thỏa mãn hoàn toàn để HS thấy rằng mọi điều kiện của giả thiết là không thể thiếu được;
- Tìm các ứng dụng của định lí trong giải bài tập toán để từ đó hình thành khả năng liên tưởng một bài toán với một định lí ăn khớp.

Ví dụ: (Về hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục).

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Cấu trúc lôgic của định lí có dạng $A \Rightarrow B$, trong đó A là hội của hai điều kiện f *liên tục trên đoạn* $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Nếu thiếu một trong hai yếu tố này thì kết luận của định lí sẽ không còn đúng nữa.

Chẳng hạn, xét hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1\\ 3, & x=1\end{cases}$ có

$f(2)=1>0, f(-2)=-\dfrac{1}{3}<0$, suy ra $f(2).f(-2)<0$,

nhưng thiếu mất giả thiết *f* liên tục trên đoạn $[-2;2]$ nên không thể kết luận phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên $(-2;2)$.

- Giáo viên cũng nên tạo cơ hội cho HS biết được giả thiết của định lí chỉ là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần. Chẳng hạn, thông qua ví dụ tìm nghiệm của phương trình $f(x)=0$, trong đó $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$. Rõ ràng rằng phương trình này nhận $x=1$ là nghiệm nhưng hàm số không liên tục trên bất kì đoạn nào chứa điểm 1.

- Định lí này có ý nghĩa trong vấn đề chứng minh một phương trình có nghiệm mà không cần tìm giá trị nghiệm. Tình huống gợi cho HS liên tưởng đến định lí này là các bài toán chỉ có yêu cầu xác định sự tồn tại nghiệm, số nghiệm của phương trình mà không cần chỉ ra cụ thể nghiệm đó là bao nhiêu. Sử dụng định lí trên cho phép khẳng định sự tồn tại của nghiệm và tách bạch các khoảng nghiệm (Thông thường là những phương trình siêu việt, những phương trình mà hai vế không có cùng bản chất, những phương trình đa thức không nhẩm được nghiệm hữu tỉ, ...).

Biện pháp 3: Tập luyện cho HS diễn đạt các định nghĩa, định lí theo những cách khác nhau và rèn luyện khả năng nhìn bài toán dưới nhiều góc độ

Mục đích: Giúp HS biết giải quyết một vấn đề theo nhiều cách khác nhau, biết nhìn nhận những khó khăn, sai lầm và chuyển hướng khi cần thiết, biết tìm phương án tốt nhất để giải quyết. Giúp HS tìm ra được đặc điểm chung của các vấn đề tưởng chừng như rất khác nhau, từ đó tìm ra lời giải và góp phần phát triển kĩ năng phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hóa và khái quát hóa.

Cách thức thực hiện: Để thực hiện biện pháp này, có thể tiến hành theo các cách sau:

- Tập luyện cho HS diễn đạt các định nghĩa, định lí theo những dạng thức khác nhau

- Hướng dẫn HS tìm tòi các lời giải khác nhau của cùng một bài toán, phân tích, so sánh các lời giải, tổng hợp lại để tìm lời giải cho các bài toán cùng loại và tìm cách giải tốt nhất.

- Trong khi dạy khái niệm (định lí, quy tắc) mới, giáo viên cần hướng dẫn HS so sánh với những khái niệm (định lí, quy tắc) đã biết để nhận ra sự giống nhau hoặc khác nhau nào đó, giúp HS nắm vững và sâu sắc kiến thức một cách có hệ thống.

- Cần luyện tập cho HS phân tích để so sánh các vấn đề theo nhiều khía cạnh khác nhau, nhìn khía cạnh này thì chúng giống nhau nhưng nhìn khía cạnh khác chúng có thể khác nhau.

- Làm cho HS hiểu được và dùng được ngôn ngữ Toán thể hiện trong bài toán xét cả về hai mặt ngữ nghĩa và cú pháp.

Dưới đây xin nêu một ví dụ minh họa cho sự tìm tòi, phân tích các lời giải khác nhau, tổng hợp để tìm lời giải cho các bài toán cùng loại:

Ví dụ: Trong chủ đề Đại số tổ hợp, HS gặp nhiều khó khăn và sai lầm khi giải bài toán đếm. Nội dung của bài toán đếm có thể được khái quát như sau: *đếm số phần tử thuộc tập hợp A có tính chất T nào đó*. Phân tích *các phần tử thuộc A* dựa vào dấu hiệu *có tính chất T* có thể chia thành hai loại: *có tính chất T* và *không có tính chất T*. Nếu đếm số phần tử trong tập A *có tính chất T* mà khó khăn vì có quá nhiều trường hợp nên dễ dẫn tới sai lầm thì sẽ đếm số phần tử trong A *không có tính chất T*. Sau đó lấy số phần tử của A trừ đi số vừa đếm được sẽ có đáp số.

Chẳng hạn với bài toán: Một lớp học gồm 30 HS, trong đó có 14 HS nữ và 16 HS nam. Cần chọn nhóm HS gồm 6 em lấy trong lớp sao cho trong nhóm có ít nhất một HS nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Tập hợp A trong bài toán này chính là tập hợp tất cả các cách chọn 6 HS trong 30 HS. Tính chất T chính là *có ít nhất một HS nữ trong nhóm*. Nếu dựa vào dấu hiệu *ít nhất một HS nữ* thì có các trường hợp sau xảy ra: 1 HS nữ và 5 HS nam; 2 HS nữ và 4 HS nam; 3 HS nữ và 3 HS nam; 4 HS nữ và 2 HS nam; 5 HS nữ và 1 HS nam; 6 HS nữ. Có thể giải bài toán này bằng cách phân chia thành các trường hợp riêng dưới đây:

Lời giải 1: Vì trong nhóm phải có ít nhất một HS nữ nên có các trường hợp (TH) sau:

TH1: 1 HS nữ và 5 HS nam, số cách chọn là $C_{14}^{1}C_{16}^{5}$.

TH2: 2 HS nữ và 4 HS nam, số cách chọn là $C_{14}^{2}C_{16}^{4}$.

TH3: 3 HS nữ và 3 HS nam, số cách chọn là $C_{14}^{3}C_{16}^{3}$

TH4: 4 HS nữ và 2 HS nam, số cách chọn tương ứng là $C_{14}^{4}C_{16}^{2}$.

TH5: 5 HS nữ và 1 HS nam, số cách chọn tương ứng là $C_{14}^{5}C_{16}^{1}$.

TH6: 6 HS nữ, số cách chọn tương ứng là C_{14}^{6}.

Hợp các TH, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

(Xem tiếp trang 15)