VẬN DỤNG QUY TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN CỦA G. PÔLYA VÀO DẠY HỌC GIẢI BÀI TẬP TOÁN CHO HỌC SINH CHUYÊN TOÁN

• ThS. PHÍ THỊ THUỲ VÂN
Trường THPT Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương

Dạy học giải toán có vai trò quan trọng trong môn Toán, đặc biệt là đối với học sinh chuyên toán. Việc dạy học giải toán cho học sinh chuyên toán không chỉ nhằm luyện cho học sinh giải nhiều dạng toán thường gặp trong các kì thi, mà điều quan trọng hơn là phải rèn luyện cho các em tư duy sáng tạo, khả năng tự học, tự nghiên cứu và vận dụng toán học.

Theo G. Pôlya cần hình thành cho học sinh thói quen trước lời giải của bài toán tự đặt những câu hỏi dạng: "Cách giải này thật đúng, nhưng làm như thế nào để nghĩ ra một cách giải khác? Sự kiện này đã được kiểm nghiệm, nhưng làm thế nào để phát hiện ra các sự kiện như vậy? Và làm thế nào để tự mình phát hiện ra được?" ([1, tr.7]). Theo ông, cần phải giúp cho học sinh biết tiến hành hoạt động giải toán của mình thông qua những thao tác trí tuệ, đặc biệt là những "suy luận có lí" để nhận dạng bài toán, tìm tòi, trình bày và kiểm tra lời giải.

Dưới đây chúng tôi xin đưa ra một ví dụ dạy giải bài toán hình học không gian để minh họa cho khả năng và ý nghĩa của việc vận dụng tư tưởng sư phạm của G. Pôlya vào dạy học giải toán cho học sinh chuyên toán.

Bài toán 1. *Cho tứ diện ABCD, M là điểm bên trong tam giác BCD. Qua M kẻ các đường thẳng song song với AB, AC và AD cắt các mặt phẳng (ACD); (ABD); (ABC) lần lượt tại B_1, C_1, D_1. Chứng minh AM đi qua trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.*

Trong bài báo này chúng tôi kí hiệu như sau:

(?) Câu hỏi hoặc câu dẫn dắt của giáo viên

(!) Câu trả lời mong đợi của học sinh

... Biểu thị sự im lặng của học sinh sau những câu hỏi mà các em không trả lời được.

Sau đây là các câu hỏi đáp của thầy và trò trong bài giảng này (các câu hỏi này có thể tăng thêm hoặc giảm bớt đi tuỳ thuộc vào trình độ của học sinh)

Bước 1. Tìm hiểu nội dung bài toán

(?) Bài toán này thuộc dạng nào?

(!) Chứng minh.

(?) Giáo viên yêu cầu học sinh vẽ hình nêu giả thiết và kết luận của bài toán.

Bước 2. Xây dựng chương trình giải

Giáo viên hướng dẫn học sinh làm theo tuần tự sau:

1. Hướng dẫn học sinh vẽ hình.

(?) Vẽ hình các em gặp khó khăn gì?

(!) Khó xác định B_1, C_1, D_1.

(?) Liệu có xác định được B_1, C_1, D_1 một cách chính xác không? Hãy thử xác định một điểm, B_1 chẳng hạn?

...

(?) Hãy xem lại giả thiết B_1 thoả mãn điều kiện gì?

(!) MB_1 song song với AB và $B_1 \in (ACD)$.

(?) Từ điều kiện MB_1 và AB song song với nhau các em biết gì thêm về vị trí của điểm B_1?

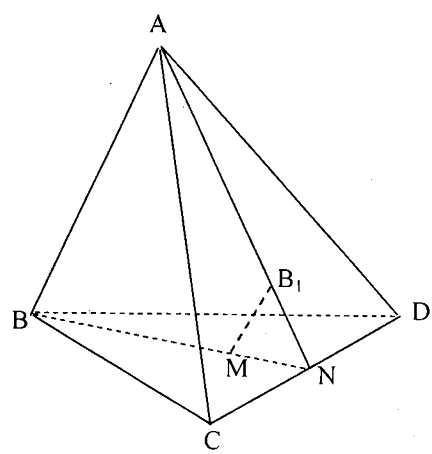
(!) $B_1 \in (ABM)$.

(?) Như vậy B_1 thuộc hai mặt phẳng (ACD) và (ABM) mà MB_1 song song với AB. Bây giờ các em đã xác định được B_1 chưa?

(!) Rồi. Trong (BCD) có BM cắt CD tại N, khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (ABM) là AN. Trong (ABN) qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AN tại B_1(Hình 1).

(?) Tương tự hãy xác định D_1, C_1.

(?) Hãy đưa các kí hiệu thích hợp vào hình vẽ.



Hình 1

2. Chứng minh AM đi qua trọng tâm của $\Delta B_1C_1D_1$

(?) Để chứng minh AM đi qua trọng tâm $\Delta B_1C_1D_1$ ta phải làm gì?

...

(?) Trọng tâm của tam giác được xác định như thế nào?

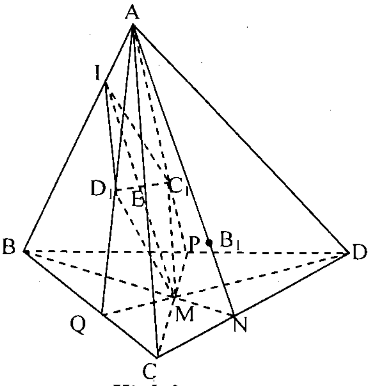
(!) Giao điểm ba đường trung tuyến.

(?) Vậy nếu AM đi qua trọng tâm $\Delta B_1C_1D_1$ thì AM và các đường trung tuyến của tam giác này có quan hệ như thế nào?

(!) AM phải cắt các đường trung tuyến đó.

2.1. Chứng minh AM cắt một đường trung tuyến của $\Delta B_1C_1D_1$

(?) Bây giờ ta có một cái đích mới là chứng minh AM cắt các đường trung tuyến của $\Delta B_1C_1D_1$. Trước tiên, hãy chứng minh AM cắt một đường trung tuyến của tam giác đó, chẳng hạn B_1E(Hình 2).



Hình 2

(?) Để AM cắt B_1E thì vị trí của điểm E như thế nào?

(!) $E\in(AMB_1)$ hay $E\in(ABN)$

(?) Do E là trung điểm của D_1C_1, nên nhiệm vụ mới của chúng ta bây giờ là gì?

(!) Phải chứng minh D_1C_1 cắt mặt phẳng (ABN) tại trung điểm E của D_1C_1.

(?) Rất đúng. Trước hết các em hãy tìm giao điểm của C_1D_1 với mặt phẳng (ABN)?

(?) Muốn tìm giao điểm của đường thẳng D_1C_1 và mặt phẳng (ABN) ta làm thế nào?

(!) Chọn một mặt phẳng chứa D_1C_1 cắt mặt phẳng (ABN) theo một giao tuyến. Sau đó xác định giao điểm D_1C_1 với giao tuyến vừa tìm được.

(?) Các em hãy làm việc đó.

(!) (MC_1D_1) là mặt phẳng chứa C_1D_1 và song song với mặt phẳng (ACD) nên chúng cắt mặt phẳng (ABN) theo hai giao tuyến MI và AN song song với nhau (I thuộc AB). Khi đó MI là giao tuyến của hai mặt phẳng (MC_1D_1) và (ABN). Giao điểm của MI và C_1D_1 chính là giao điểm của C_1D_1 và mặt phẳng (ABN).

(?) Bây giờ ta phải chứng minh điều gì?

(!) Chứng minh giao điểm của MI và C_1D_1 là trung điểm của C_1D_1.

(!) Hãy chứng minh điều đó.

(!) Tứ giác MC_1ID_1 là hình bình hành (Vì hai mặt phẳng (MC_1D_1) và (ABC) chứa hai đường thẳng AC và MC_1 song song với nhau nên giao tuyến ID_1 của chúng song song với MC_1. Tương tự IC_1 song song với MD_1), vì thế hai đường chéo MI và C_1D_1 của nó cắt nhau tại trung điểm E của mỗi đường.

(?) Bây giờ ta đã có AM và B_1E cùng thuộc mặt phẳng (ABN) mà chúng không song song với nhau nên chúng phải cắt nhau. Tức là ta đã chứng minh được AM cắt một đường trung tuyến xuất phát từ B_1 của tam giác $B_1C_1D_1$

2.2. Khẳng định AM cắt hai đường trung tuyến còn lại của $\Delta B_1C_1D_1$ để dẫn đến kết luận của bài toán.

(?) Đến đây các em đã chứng minh được AM đi qua trọng tâm của $\Delta B_1C_1D_1$ chưa?

(!) Rồi. Bằng cách tương tự ta chứng minh AM cắt hai đường trung tuyến còn lại của $\Delta B_1C_1D_1$. Mà AM không thuộc mặt phẳng $(B_1C_1D_1)$ nên AM phải đi qua giao điểm ba đường trung tuyến của $\Delta B_1C_1D_1$.

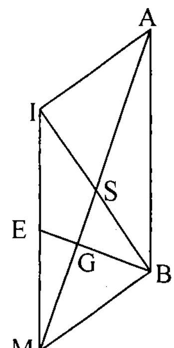
(?) Như vậy các em đã có đường lối giải bài toán này. Bây giờ các em hãy trình bày lời giải của bài toán.

**** Bước 3. Thực hiện chương trình giải bài toán***

Lời giải mong đợi. Gọi N là giao điểm của BM và CD, P là giao điểm của CM và BD, Q là giao điểm của DM và BC (h.2). Dễ thấy $B_1\in AN$; $C_1\in AP$; $D_1\in AQ$. Vì hai mặt phẳng (MC_1D_1) và (ABC) chứa hai đường thẳng AC và MC_1 song song với nhau nên giao tuyến ID_1 của chúng song song với MC_1. Tương tự IC_1 song song với MD_1, do vậy tứ giác MC_1ID_1 là hình bình hành. Nên trung điểm E của C_1D_1 cũng là trung điểm của MI. Vì vậy B_1E và AM cùng thuộc mặt phẳng (ABN) mà chúng không song song với nhau nên chúng cắt nhau. Chứng minh tương tự ta suy ra AM cắt hai đường trung tuyến còn lại của tam giác $B_1C_1D_1$ mà $AM\not\subset(B_1C_1D_1)$ nên AM đi qua giao điểm ba đường trung tuyến của tam giác $B_1C_1D_1$. Do đó AM đi qua trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

**** Bước 4. Kiểm tra và nghiên cứu lời giải của bài toán***

(?) Trong bài toán này để chứng minh đường thẳng AM không nằm trong mặt phẳng $(B_1C_1D_1)$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng trong mặt phẳng $(B_1C_1D_1)$, ta cần chứng minh đường thẳng a lần lượt cắt các đường thẳng đó ở trong mặt phẳng $(B_1C_1D_1)$. Tuy nhiên ta cũng có thể thay điều đó bằng việc chứng minh AM cắt đường trung tuyến B_1E tại trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$ bằng cách xét hình bình hành $AIMB_1$ với chú ý E là trung điểm của IM (hình 3). Khi ấy ta còn tính được tỉ số $\frac{AG}{MG}=2$



Hình 3

(?) Từ những nhận xét này các em có thể giải được bài toán sau đây được không?

Bài toán 2. *Cho góc tam diện Axyz thay đổi quay quanh điểm A cố định và một điểm M cố định nằm trong góc tam diện. Qua M kẻ các đường thẳng song song với Ax, Ay, Az cắt các mặt (yAz), (xAz), (xAy) của tam diện lần lượt tại B_1, C_1, D_1. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$ cố định.*

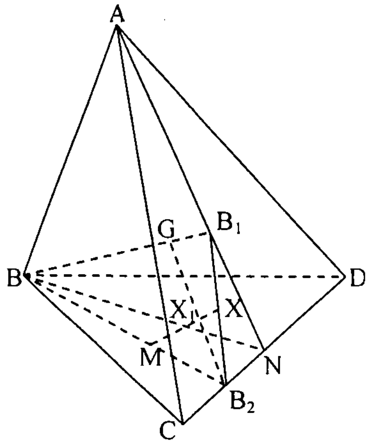
Hướng dẫn: Trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$ là điểm chia đoạn AM theo tỉ số 2:1.

(?) Nếu thay giả thiết các đường thẳng qua M song song với AB, AC, AD của bài toán 1 thành các đường thẳng qua M song song với GB, GC, GD (với G là trọng tâm của tứ diện ABCD) ta sẽ có bài toán mới sau đây:

Bài toán 3. *Cho tứ diện ABCD với trọng tâm G. M là điểm bên trong ΔBCD. Qua M kẻ MX, MY, MZ lần lượt song song với GB, GC, GD (X, Y, Z lần lượt thuộc mặt phẳng (ACD), (ABD), (ABC)). Chứng minh GM đi qua trọng tâm ΔXYZ (Hình 4).*

Hướng dẫn: Sử dụng phép vị tự tâm M tỉ số 1:4. Sau đó áp dụng bài 1 với tứ diện GBCD ta suy ra điều phải chứng minh.

(?) Từ bài toán 3 này các em có thể giải



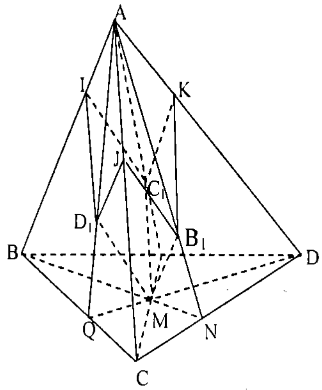
Hình 4

được bài toán 4 sau đây không?

Bài toán 4. *Gọi O là tâm của tứ diện đều. Từ một điểm M bất kì trên một mặt của tứ diện hạ các đường vuông góc với ba mặt còn lại, với K, L, N là chân ba đường vuông góc này. Chứng minh OM đi qua trọng tâm của tam giác KLN.*

Hướng dẫn: Vì tứ diện đã cho là đều nên O vừa là trọng tâm, vừa là trực tâm của tứ diện. Do vậy các đường thẳng qua M và vuông góc với các mặt còn lại chính là đường thẳng qua M và song song với OA, OB, OC, khi đó bài toán trở về bài toán 3

(?) Gọi S là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $AIMB_1$. Xét phép đối xứng tâm S: M biến thành A, B_1 biến thành I, C_1 biến thành J ($J \in AC$), D_1 biến thành K ($K \in AD$) (Hình 5).



Hình 5

(?) Khi đó ta có hình hộp $AJ\ B_1K.I\ D_1M\ C_1$ với một tính chất quen thuộc của hình hộp là: Đường chéo AM của hình hộp đi qua trọng tâm của tam giác chéo $B_1\ C_1\ D_1$.

(?) Từ phép đối xứng tâm trên ta suy ra tứ diện AIJK và tứ diện $M\ B_1\ C_1\ D_1$ bằng nhau. Do đó thay cho việc xét tứ diện $M\ B_1\ C_1\ D_1$ ta đi xét tứ diện AIJK, Từ đây ta sẽ có bài toán 5 thú vị sau:

Bài toán 5. *Với giả thiết của bài toán 1. Tìm vị trí của M để thể tích tứ diện $M\ B_1\ C_1\ D_1$ là lớn nhất.*

Hướng dẫn: Nhờ phép đối xứng tâm đã nêu ở trên ta có ta có hai tứ diện $M\ B_1\ C_1\ D_1$ và AIJK có thể tích bằng nhau.

Mặt khác $\dfrac{V_{AIJK}}{V_{ABCD}} = \dfrac{AI.AJ.AK}{AB.AC.AD}$, ;

$$\frac{AI}{AB} = \frac{MB_1}{AB} = \frac{MN}{BN} = \frac{S_{MCD}}{S_{BCD}};$$

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{S_{MBD}}{S_{BCD}};\ \frac{AK}{AD} = \frac{S_{MBC}}{S_{BCD}}.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{AI}{AB} + \dfrac{AJ}{AC} + \dfrac{AK}{AD} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{V_{AIJK}}{V_{ABCD}}} \text{ nên } \frac{V_{AIJK}}{V_{ABCD}} \leq \frac{1}{27}$$

hay $\dfrac{V_{MB_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} \leq \dfrac{1}{27}$ (*).

(?) Qua bài toán 5 các em hãy đề xuất bài toán mới.

(!) **Bài toán 6.** *Cho góc tam diện Axyz và M là điểm cố định góc này. Xác định mặt phẳng qua M cắt Ax, Ay, Az lần lượt tại B, C, D sao cho thể tích tứ diện ABCD là nhỏ nhất*

Cuối cùng giáo viên yêu cầu học sinh về nhà làm các việc sau đây:

- Trong bài toán 1: Tìm vị trí của M để hai mặt phẳng (BCD) và ($B_1\ C_1\ D_1$) song song với nhau.
- Giải bài toán 1 bằng phương pháp khác (chẳng hạn phương pháp véc tơ).
- Mở rộng bài toán 1 từ điều kiện M nằm trong tam giác BCD thành M trong không gian.

Để việc vận dụng quy trình giải toán của G. Pôlya vào dạy học giải toán có hiệu quả, trong mỗi bước của quy trình này, giáo viên cần tận dụng mọi cơ hội để lồng ghép các câu hỏi dẫn dắt suy nghĩ của học sinh, giúp các em tìm tòi lời giải bài toán một cách chủ động, sáng tạo. Điều quan trọng không chỉ ở chỗ học sinh giải được bài toán mà còn phát hiện, khai thác được mối quan hệ giữa bài tập đang xét với các bài tập khác, từ đó thu được tri thức phương pháp để giải một dạng toán. Cách làm như vậy giúp cho học sinh chẳng những hiểu, nắm vững cách giải mà còn thấy được quá trình suy nghĩ tìm ra lời giải đó một cách tự nhiên, hợp lí, tạo niềm tin vào khả năng của mình và nếu cố gắng có thể tự tìm ra được. Dần dần, khi đứng trước mỗi bài toán, học sinh có thói quen và khả năng tự đặt ra và trả lời được những câu hỏi để giải và khai thác bài toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G. Pôlya, *Giải một bài toán như thế nào?* (người dịch: Hà Sĩ Hồ, Hoàng Chúng, Lê Đình Phi, Nguyễn Hữu Chương). NXB Giáo dục, Hà Nội, 1995.
2. G. Pôlya, *Toán học và những suy luận có lí* (người dịch: Hà Sĩ Hồ, Hoàng Chúng, Lê Đình Phi, Nguyễn Hữu Chương). NXB Giáo dục, Hà Nội, 1995.
3. G. Pôlya, *Sáng tạo toán học* (người dịch: Nguyễn Sỹ Tuyển, Phan Tất Đắc, Hồ Thuần, Nguyễn Giản), NXB Giáo dục, Hà Nội, 1997.
4. Phí Thị Thuỳ Vân, *Vận dụng quy trình giải bài toán của G. Pôlya để dạy học một số dạng toán hình học không gian lớp 11 Trung học phổ thông*. Luận văn Thạc sĩ Khoa học Giáo dục, Trường ĐHSP Hà Nội, 2005.

SUMMARY

The article presents the application of the procedure of solving the mathematical problem by Polya to teaching mathematically-gifted students how to solve mathematical problems.