Phát triển năng lực mô hình hóa cho học sinh trong dạy học Hàm số ở lớp 10 trung học phổ thông

Cao Thị Hà*[1], Nguyễn Xuân Dung[2]

* Tác giả liên hệ
[1] Email: caoha@vnu.edu.vn
Trường Đại học Giáo dục - Đại học Quốc gia Hà Nội
144 Xuân Thủy, Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam
[2] Email: xudung1997@gmail.com
Trường Trung học phổ thông Việt Nam - Ba Lan
01/48 đường Ngọc Hồi, Hoàng Mai, Hà Nội, Việt Nam

TÓM TẮT: *Bài viết trình bày một cách có hệ thống các khái niệm liên quan đến mô hình hóa và năng lực mô hình hóa. Bài viết cũng phân tích vai trò và tiềm năng của nội dung Hàm số trong việc phát triển năng lực mô hình hóa và đề xuất một số biện pháp để phát triển năng lực mô hình hóa cho học sinh khi dạy học Hàm số ở lớp 10.*

TỪ KHÓA: **Mô hình hóa, mô hình hóa Toán học, năng lực, năng lực mô hình hóa, Hàm số.**
➔ Nhận bài 03/01/2023 ➔ Nhận bài đã chỉnh sửa 17/02/2023 ➔ Duyệt đăng 15/3/2023.
DOI: https://doi.org/10.15625/2615-8957/12310304

1. Đặt vấn đề

Nghiên cứu về mô hình hóa xuất hiện khá lâu trong giáo dục, tuy nhiên được đánh dấu rõ nét từ nghiên cứu của Pollak vào năm 1970. Tiếp theo là các nghiên cứu nổi bật của các tác giả Swetz và Hartzler (1991), Ogborn (1994), Blum và Leib (2006), Stillman, Galbraith, Brown (2007), Biembengut, M. S. & Hein, N., 2007, Aristides C. Barreto (2010). Ở Việt Nam, việc nghiên cứu về mô hình hóa, năng lực mô hình hóa và việc phát triển năng lực mô hình hóa cho học sinh đã được các tác giả Nguyễn Thị Tân An (2012), Lê Thị Hoài Châu (2014), Nguyễn Danh Nam (2016) quan tâm nghiên cứu. Các tác giả Việt Nam chủ yếu tập trung việc nghiên cứu giải pháp để phát triển năng lực mô hình hóa cho học sinh trong quá trình dạy học Toán dựa trên các quy trình mô hình hóa mà các tác giả ngoài nước đã đề xuất. Chương trình Giáo dục phổ thông 2018, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã xác định rõ năng lực mô hình hóa là một trong những năng lực đặc thù cần hình thành cho học sinh trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông. Blum và Jensen (2007) cho rằng, năng lực mô hình hóa là khả năng thực hiện đầy đủ các giai đoạn của quá trình mô hình hóa trong một tình huống cho trước. Quan điểm này khá phù hợp với quan điểm về năng lực mô hình hóa được quy định trong Chương trình Giáo dục phổ thông 2018. Do vậy, phát triển năng lực mô hình hóa cho học sinh trong dạy học Toán là tổ chức cho người học thực hiện tốt quy trình mô hình hóa một tình huống thực tiễn tương thích với kiến thức Toán học mà người học cần lĩnh hội.

Trong Chương trình môn Toán ở trường phổ thông, quan hệ hàm là mối quan hệ phổ biến nhất và trọng tâm nhất, mô tả nhiều nhất các tình huống thực tiễn gắn với cuộc sống của học sinh. Do vậy, dạy học hàm số là cơ hội thuận lợi để giúp học sinh phát triển năng lực mô hình hóa. Các vấn đề: Biểu hiện của năng lực mô hình hóa trong học tập hàm số bậc nhất và bậc hai là gì? Biện pháp nào để thúc đẩy biểu hiện này của người học rõ nét hơn trong học tập? Những vấn đề trên sẽ được trả lời trong bài viết này.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Mô hình Toán học, mô hình hóa Toán học

Mô hình: Theo Swetz và Hartzler (1991), mô hình là một mẫu, một đại diện, một minh họa được thiết kế để mô tả cấu trúc, cách vận hành của một sự vật hiện tượng, một hệ thống hay một khái niệm. Vậy, mô hình là một hình mẫu dùng để minh họa, mô tả hình dáng, cấu trúc, phương thức hoạt động của sự vật, hiện tượng hay một khái niệm. Mô hình có thể được nhìn ở nhiều bình diện, về mặt trực giác, người ta thường nghĩ mô hình theo ý nghĩa vật lí, mô hình được hiểu như một vật có điểm đặc trưng của vật thực tế, được dùng để thay thế cho vật thực tế đó, thông qua mô hình, ta có thể khám phá đối tượng mà không cần dùng đến vật thật. Về mặt nhận thức, mô hình là sản phẩm của quá trình tư duy, ra đời nhờ quá trình trừu tượng hóa các đối tượng cụ thể hay nói cách khác, đối tượng nghiên cứu đã được lí tưởng hóa.

Mô hình hóa: Từ định nghĩa về mô hình ta có thể thấy, muốn có mô hình con người ta phải tạo ra nó từ tình huống thực tiễn, quá trình tạo ra mô hình chính là mô hình hóa (modelling). Ogborn (1994) cho rằng: Mô hình hóa là suy nghĩ về một thứ nhân tạo đơn giản hơn. Mô hình hóa là thay thế đối tượng gốc bằng một mô hình nhằm thu thập các thông tin quan trọng về đối tượng bằng cách tiến hành các nghiên cứu thực nghiệm trên mô hình. Gierre (1988) cho rằng: Mô hình hóa là mô tả một tình huống trong thực tế nhằm mục đích giải quyết một vấn đề hoặc câu hỏi trong tình huống đó. Mô hình hóa vừa là cách làm việc, vừa là cách suy nghĩ. Nó bao gồm một quá trình lặp đi lặp lại, đòi hỏi sự sáng tạo và phát minh trong đó kiến thức Toán học, Khoa học và Kĩ thuật được áp dụng để mô tả tình huống mới.

Xét trên phương diện dạy học, Nguyễn Danh Nam (2016) cho rằng: Mô hình hóa được biết đến như một phương pháp dạy học, cung cấp cho học sinh hiểu khái niệm của vấn đề, giúp học sinh đọc hiểu, thiết lập và giải quyết vấn đề cụ thể dựa trên tình huống thực tế [5]. Mô hình hóa giống như một phương pháp nghiên cứu khoa học, giúp học sinh biết cách nghiên cứu và ứng dụng các mô hình Toán học vào các lĩnh vực khác nhau. Đây chính là môi trường để học sinh khám phá các kiến thức Toán học.

Tóm lại, mô hình được dùng để mô tả một đối tượng thực tiễn nào đó, song mô hình không thể thay thế cho vật mẫu. Mô hình hóa là quá trình tạo ra các mô hình để giải quyết vấn đề nào đó xuất phát từ tình huống thực tiễn.

***Mô hình hóa Toán học*:** Theo Aristides C. Barreto (2010), mô hình hóa Toán học là một mô hình trừu tượng, sử dụng ngôn ngữ Toán học (các đồ thị, phương trình, hệ phương trình, hàm số, các kí hiệu Toán học,…) để biểu diễn và mô tả đặc điểm của một sự vật, hiện tượng hay một đối tượng thực được nghiên cứu.

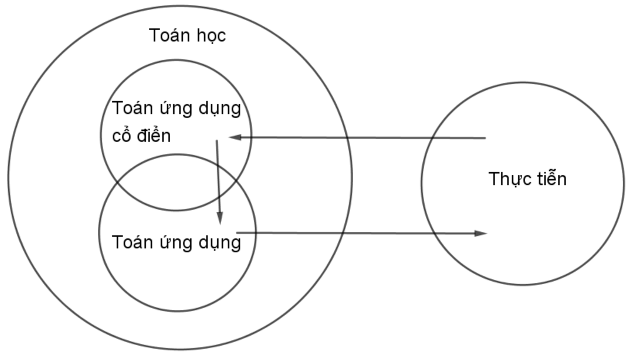
Nguyễn Danh Nam (2016), đã dựa vào quan điểm của Edwards và Hamson (2001) để đưa ra khái niệm mô hình hóa Toán học là quá trình chuyển đổi một vấn đề thực tế sang một vấn đề Toán học thông qua việc thiết lập và giải quyết các mô hình Toán học, thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tế, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận. Nói cách khác, mô hình hóa Toán học chính là quá trình giải quyết vấn đề thực tế bằng công cụ và ngôn ngữ Toán học. Vấn đề của tình huống thực tiễn được chuyển đổi sang vấn đề Toán học phù hợp và ngược lại.

Theo Lê Thị Hoài Châu (2014), mô hình Toán học là sự giải thích ngôn ngữ Toán học cho một hệ thống ngoài Toán học với những câu hỏi xác định mà người ta đặt ra trên hệ thống này [8]. Quá trình mô hình hóa Toán học là quá trình xây dựng một mô hình Toán học cho vấn đề ngoài Toán học, giải quyết vấn đề bằng ngôn ngữ Toán học trong mô hình đó, rồi kiểm tra và đánh giá kết quả trong ngữ cảnh thực tiễn, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận.

Như vậy, có thể nói, mô hình hóa Toán học được hiểu là sử dụng các công cụ Toán học để mô tả các tình huống thực tiễn, thể hiện các tình huống đó dưới dạng ngôn ngữ Toán học, đưa bài toán thực tiễn thành bài toán Toán học phù hợp. Quá trình chuyển đổi giữa tình huống thực tiễn và tình huống Toán học tuân theo một quy trình nhất định với những quy tắc đặc biệt để xây dựng giả thuyết Toán học từ đó học sinh có thể dễ dàng nhìn nhận các vấn đề thực tiễn. Mô hình hóa Toán học là một hoạt động phức tạp, chuyển đổi giữa Toán học và thực tiễn theo cả hai chiều. Vì vậy, đòi hỏi học sinh phải có nhiều năng lực khác nhau trong các lĩnh vực Toán học khác nhau, đồng thời có kiến thức liên quan đến tình huống thực tiễn.

2.2. Quy trình mô hình hóa Toán học

Năm 1970, Pollak đã đưa ra sơ đồ mô hình hóa đầu tiên về sự chuyển đổi giữa thực tiễn và Toán học và ngược lại khi thực hiện mô hình hóa.



Sơ đồ 1: Sơ đồ quy trình mô hình hóa Toán học theo Pollak (1970)

Từ Sơ đồ 1 ta thấy, tình huống thực tiễn ban đầu được phiên dịch sang tình huống Toán học dựa trên ngôn ngữ Toán học rồi giải bài toán trong mô hình đó và quay lại áp dụng kết quả với tình huống thực tiễn ban đầu. Nhìn vào mô hình này của Pollak, ta thấy ông mới chỉ mô tả được một cách vô cùng khái quát quy trình mô hình hóa Toán học. Chúng ta chưa nhận thấy được những công việc quan trọng phải làm để có thể chuyển từ bài toán thực tiễn sang bài toán Toán học và ngược lại. Nhằm chi tiết hóa quy trình do Pollak đề xuất, Swetz và Hartzler (1991) cho rằng, chúng ta có thể mô tả quá trình mô hình hóa Toán học một tình huống nào đó với bốn giai đoạn. Cụ thể như sau:

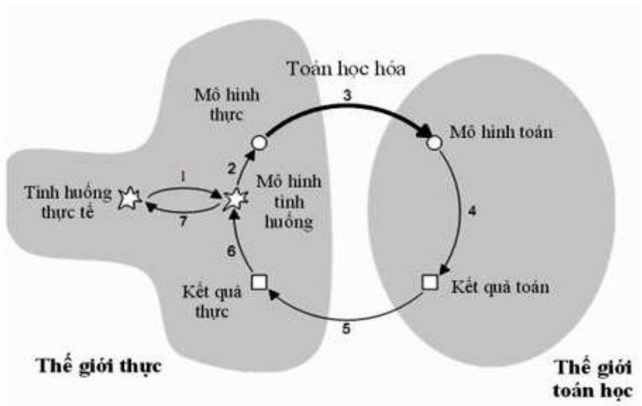
Giai đoạn 1: Xây dựng mô hình. Đây là giai đoạn vô cùng quan trọng, trong giai đoạn này ta cần quan sát hiện tượng thực tiễn, xây dựng tình huống, tìm các yếu tố trọng tâm có ảnh hưởng đến vấn đề thực tiễn đó, lập giả thuyết về mối quan hệ giữa các yếu tố đã cho bằng cách dùng ngôn ngữ Toán học, nhờ trí tưởng tượng và trực giác học sinh để xây dựng mô hình dựa trên các đặc điểm đặc trưng của đối tượng. Mô hình này có thể là mô hình vật chất hoặc liên tưởng tới những mô hình đã có sẵn.

Giai đoạn 2: Nghiên cứu mô hình: Trong giai đoạn này, mô hình phát hiện được ở giai đoạn trước trở thành đối tượng nghiên cứu bằng các phương pháp lí thuyết và thực nghiệm khác nhau. Đó là quá trình nghiên cứu mô hình có phù hợp với đối tượng ban đầu hay không và đến giai đoạn tiếp theo.

Giai đoạn 3: Giai đoạn xử lí kết quả: Trong giai đoạn này, ta cần vận dụng các phương pháp và công cụ Toán học phù hợp để giải quyết mô hình Toán học, sau đó đối chiếu mô hình với thực tiễn và rút ra kết luận để trả lời cho tình huống thực tiễn.

Giai đoạn 4: Đưa ra kết quả và điều chỉnh mô hình. Trong giai đoạn này, từ kết quả thu được dựa trên mô hình Toán học được chuyển về đối tượng nghiên cứu ban đầu để đối chiếu, dựa vào đó để điều chỉnh mô hình phù hợp với đối tượng.

Việc nghiên cứu về mô hình hóa vẫn được các tác giả tiếp tục hoàn thiện để có thể giúp học sinh dễ vận dụng. Cụ thể, chúng ta cần làm những gì trong các giai đoạn mô hình hóa để đảm bảo sự thành công và có được mô hình tối ưu. Blum và Leib (2006) đã đề xuất mô hình bao gồm 7 bước được thể hiện trong Sơ đồ 2:



Sơ đồ 2: Sơ đồ quy trình mô hình hóa Toán học theo Bloom và Leib (2006)

Các giai đoạn được thể hiện theo sơ đồ trên như sau:

Bước 1: Từ tình huống thực tiễn, xây dựng một mô hình cho tình huống đó, khám phá và thiết lập mục tiêu giải quyết cho tình huống.

Bước 2: Đơn giản hóa tình huống và đưa các biến phù hợp vào để được mô hình thực của tình huống, lựa chọn các biến quan trọng để mô tả tình huống.

Bước 3: Chuyển từ mô hình thực sang mô hình toán, hay thiết lập mô hình bằng công cụ và ngôn ngữ Toán học, mô tả mối quan hệ giữa các biến số.

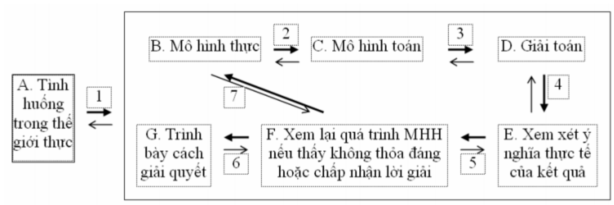
Bước 4: Làm việc trong môi trường Toán học để đạt được kết quả, phân tích các mối quan hệ giữa các biến để rút ra kết luận.

Bước 5: Thể hiện kết quả trong ngữ cảnh thực tế.

Bước 6: Xem xét tính phù hợp của kết quả hay phải thực hiện chu trình lần 2.

Bước 7: Trình bày cách giải quyết.

Năm 2007, Stillman, Galbraith, Brown (2007) đưa ra sơ đồ mô hình hóa mở rộng với sự cải tiến chi tiết của sơ đồ của Blum và Leib (2006). Bên cạnh việc mô tả quá trình mô hình hóa, Stillman và các cộng sự nhấn mạnh tính chất phản ánh quá trình thông qua mũi tên hai chiều, đồng thời chú ý đến các hoạt động nhận thức của học sinh xảy ra trong suốt quá trình. Một ưu điểm nữa trong quy trình này của các tác giả là bước kiểm nghiêm tính hợp lí và tối ưu của mô hình đã xây dựng và có điều chỉnh cho phù hợp.



Sơ đồ 3: Sơ đồ quy trình mô hình hóa Toán học theo Stillman, Galbraith, Brown (2007)

Trong Sơ đồ 3, các mục từ A đến G là các bước của quá trình mô hình hóa, các mũi tên thể hiện sự chuyển đổi giữa các bước: 1) Hiểu, đơn giản hóa, xây dựng lại tình huống; 2) Đặt giả thiết, phát biểu mô hình toán; 3) Giải toán; 4) Giải thích kết quả toán; 5) So sánh, phê phán, xem xét tính hợp lí; 6) Chia sẻ kết quả thực tế (nếu mô hình không được chấp nhận); 7) Lặp lại quá trình (nếu mô hình không được chấp nhận).

Từ các quy trình mô hình hóa của Swetz và Hartzler (1991), Blum và Leib (2006), Stillman, Galbraith, Brown (2007), chúng tôi nhận thấy, về bản chất 4 giai đoạn trong quy trình mô hình hóa Toán học do Swetz và Hartzler (1991) đề xuất đã chứa đựng các bước trong quy trình của Blum và Leib (2006), Stillman, Galbraith, Brown (2007). Do vậy, trong nghiên cứu này, chúng tôi dựa chủ yếu vào quy trình mô hình hóa Toán học của Swetz và Hartzler (1991).

2.3. Năng lực mô hình hóa Toán học

Năng lực mô hình hóa Toán học: Có nhiều định nghĩa khác nhau về năng lực mô hình hóa Toán học. Các tác giả (Verschaffel, L. and E. De Corte, 1997; Nguyễn Thị Nga, 2014; Lê Thị Hoài Châu, 2014; Nguyễn Danh Nam, 2015) coi năng lực mô hình hóa Toán học như là khả năng vận dụng kiến thức Toán học vào thực tiễn, hay là khả năng áp dụng những hiểu biết Toán học để chuyển một tình huống thực tiễn về dạng Toán học. Các tác giả đều có những quan điểm khá tương đồng khi cho rằng, các thành tố của năng lực Toán học hóa tình huống thực tiễn của học sinh trung học phổ thông bao gồm:

- *Năng lực thu nhận thông tin Toán học từ tình huống thực tiễn:* Khả năng quan sát tình huống thực tiễn; khả năng tưởng tượng, chuyển đổi các ý tưởng từ thực tiễn thành các yếu tố Toán học; khả năng ước lượng, dự đoán các kết quả có thể xảy ra của tình huống.
- *Năng lực định hướng đến các yếu tố trung tâm của tình huống:* Khả năng xác định yếu tố trọng tâm của tình huống; khả năng thiết lập mối quan hệ giữa các yếu

tố, đánh giá mức độ phụ thuộc của các yêu tố; khả năng loại bỏ những gì không bản chất.

- *Năng lực sử dụng ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ Toán học:* Khả năng sử dụng ngôn ngữ tự nhiên ngắn gọn, chính xác để diễn đạt các tình huống; Khả năng sử dụng ngôn ngữ Toán học để chuyển đổi các bài toán thực tiễn sang dạng Toán học và giải bài toán đó.

- *Năng lực xây dựng mô hình Toán học:* Khả năng phát hiện ra yếu tố trọng tâm của tình huống thực tiễn; khả năng biểu diễn các đại lượng thực tế bằng ngôn ngữ Toán học; Khả năng biểu đạt các mối quan hệ giữa các đại lượng bằng các mệnh đề Toán học, các biểu thức chứa biến, đồ thị, biểu đồ,...; Khả năng khái quát hóa các tình huống thực tiễn theo quan điểm của Toán học.

- *Năng lực làm việc với mô hình Toán học:* Khả năng giải toán trên mô hình, dựa vào lời giải bài toán nêu ra được kết quả của mô hình; Khả năng biến đổi mô hình Toán học theo ý cá nhân; Khả năng dùng mô hình phán đoán tình huống thực tiễn.

- *Năng lực kiểm tra, đánh giá, điều chỉnh mô hình:* Khả năng kiểm tra, đối chiếu kết quả; khả năng phê phán, phát hiện giới hạn của mô hình; khả năng vận dụng suy luận có lí vào việc đưa ra các mô hình toán cho tình huống thực tiễn và biết so sánh tìm ra mô hình hợp lí hơn.

Tuy nhiên, thực tế nhiều tác giả cũng cho rằng, không thể đồng nhất năng lực mô hình hóa với năng lực Toán học hóa các tình huống thực tiễn. Theo Blum và Jensen (2007), năng lực mô hình hóa Toán học là khả năng thực hiện đầy đủ các giai đoạn của quy trình mô hình hóa trong dạy học Toán nhằm giải quyết các vấn đề Toán học được đặt ra. Các thành tố của năng lực mô hình hóa Toán học bao gồm: 1) Đơn giản giả thuyết; 2) Làm rõ mục tiêu; 3) Thiết lập vấn đề; 4) Xác định biến, tham số, hằng số; 5) Thiết lập mệnh đề Toán học; 6) Lựa chọn mô hình; 7) Biểu diễn mô hình thích hợp; 8) Liên hệ lại vấn đề trong thực tiễn.

Theo Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018, năng lực mô hình hóa Toán học thể hiện qua việc: 1) Xác định được mô hình Toán học (gồm công thức, phương trình, bảng biểu, đồ thị,…) cho tình huống xuất hiện trong bài toán thực tiễn; 2) Giải quyết được những vấn đề Toán học trong mô hình được thiết lập; 3) Thể hiện và đánh giá được lời giải trong ngữ cảnh thực tế và cải tiến được mô hình nếu cách giải quyết không phù hợp.

Trong nghiên cứu này, chúng tôi quan niệm năng lực mô hình hóa Toán học như Chương trình Giáo dục phổ thông 2018. Chúng tôi đồng ý với Blum và Jensen (2007) rằng, năng lực mô hình hóa Toán học được hình thành thông qua các giai đoạn của quy trình mô hình hóa.

Năng lực mô hình hóa Toán học của học sinh trong học tập nội dung Hàm số bậc hai: Theo Khinsin, không có khái niệm nào khác có thể phản ánh những hiện tượng khách quan một cách trực tiếp và cụ thể như khái niệm Hàm, không có khái niệm nào có thể thể hiện được ở trong nó những nét biện chứng của tư duy Toán học hiện đại như khái niệm Hàm vì với khái niệm Hàm người ta nghiên cứu sự vật trong trạng thái biến đổi sinh động của nó chứ không phải trong trạng thái tĩnh, trong sự phụ thuộc lẫn nhau chứ không phải tách rời nhau (Nguyễn Bá Kim, 2002). Vì vậy, Hàm số là một trong những khái niệm cơ bản của Toán học và giữ vị trí trung tâm trong Chương trình môn Toán ở trường phổ thông.

Dựa vào mô tả về năng lực mô hình hóa và qua các yêu cầu học sinh cần đạt khi học nội dung "Hàm số" được quy định trong Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 (lớp 10), chúng tôi đề xuất các biểu hiện của năng lực mô hình hóa của học sinh khi học Hàm số như sau:

(N1) Chuyển đổi từ ngôn ngữ thực tiễn sang ngôn ngữ Toán học (các biến số, tham số, kí hiệu…). Lựa chọn được công thức xác định Hàm bậc nhất/bậc hai hoặc bảng giá trị hoặc đồ thị của Hàm bậc nhất/bậc hai cho trước mà phù hợp với tình huống xuất hiện trong bài toán thực tiễn.

(**N2)** Thiết lập được bảng giá trị (bảng gồm một số hữu hạn giá trị) của Hàm bậc nhất/bậc hai mà tương thích với một tình huống cho trước từ đó dự đoán được công thức xác định Hàm bậc nhất/bậc hai tương ứng.

(**N3)** Đặt ẩn, xác định được mối tương quan Hàm bậc nhất/bậc hai giữa các yếu tố trong bài toán thực tiễn.

(**N4)** Giải quyết được những vấn đề Toán học trong mô hình Hàm bậc nhất/bậc hai vừa được thiết lập để trả lời cho bài toán thực tiễn.

(N5) Đánh giá được lời giải trong ngữ cảnh thực tế và cải tiến được mô hình nếu cách giải quyết không phù hợp, hướng tới lí giải được tính đúng đắn của lời giải.

2.4. Một số biện pháp sư phạm nhằm phát triển năng lực mô hình hóa cho học sinh lớp 10 trường trung học phổ thông trong dạy học nội dung "Hàm số"

2.4.1. Biện pháp 1: Rèn luyện cho học sinh kĩ năng chuyển ngôn ngữ tự nhiên sang ngôn ngữ Toán học và kĩ năng xác định các biến số, tham số liên quan và mối liên hệ giữa các biến số

Mô hình hoá Toán học là quá trình chuyển đổi từ thực tiễn sang Toán học bằng các ngôn ngữ Toán học, bao gồm các biến số, tham số, kí hiệu… Do vậy, việc rèn luyện kĩ năng xác định được các biến số, tham số liên quan và mối liên hệ giữa các biến số cho học sinh là cần thiết. Biện pháp này hướng đến bồi dưỡng thành tố N1, N3 và N4 cho học sinh.

Ví dụ 1 *(Bài toán quả bóng đá):* Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oth, trong đó t là thời gian (tính bằng giây), kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ độ cao 1,2m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá lên, nó đạt độ cao 6m.

Hãy tìm Hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

Xác định độ cao lớn nhất của quả bóng (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

Sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên (tính chính xác đến phần trăm)?

- Qua hoạt động này, học sinh được rèn luyện các kĩ năng sau đây: 1) Thiết lập và biểu diễn đồ thị của hàm số bậc hai (tương thích với N1-N2); 2) Kĩ năng mô tả những tình huống thực tiễn bằng công cụ Toán học (N3); 3) Kĩ năng giải bài toán liên quan đến giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số bậc hai (N4).

Tiến trình hoạt động: Giáo viên chia lớp thành các nhóm học sinh và tổ chức cho nhóm giải quyết bài toán theo các giai đoạn sau:

- *Giai đoạn 1 (Toán học hoá).* Giáo viên hướng dẫn nhóm học sinh phân tích và hiểu được vấn đề thực tiến như sau: Quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oth, vì vậy hàm số biểu thị độ cao h theo thời gian t là một hàm số bậc hai và cố phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng; Độ cao lớn nhất của quả bóng chính là tung độ của đỉnh parabol; Khoảng thời gian từ khi quả bóng được đá lên đến khi chạm đất (tức là tung độ của đồ thị hàm số bằng 0).

- *Giai đoạn 2 (Giải bài toán).* Giả sử $h = f(t) = at^2 + bt + c$. Giáo viên cần hướng dẫn nhóm học sinh tìm các hệ a, b, c. Các nhóm học sinh thảo luận và tìm các hệ số a, b, c như sau:

Quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m nghĩa là: $f(0) = c = 1,2$. Sau đó 1 giây nó đạt độ cao 8,5m nên : $f(1) = a + b + 1,2 = 8,5$. Sau khi đá 2 giây quả bóng ở độ cao 6m, nghĩa là : $f(2) = 4a + 2b + 1,2 = 6$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} a + b = 7,3 \\ 2a + b = 2,4 \end{cases}$ thu được kết quả sau: $a = -4,9; b = 12,2$. Vậy hàm số cần tìm là: $f(t) = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

Độ cao lớn nhất của quả bóng chính là tung độ của đỉnh parabol: $y = \frac{-\Delta}{a} = \frac{-43,09}{-4,9} \approx 8,794.$ Giải phương trình bậc hai $-4,9t^2 + 12,2t + 1,2 = 0$ được hai nghiệm gần đúng là $t_1 = -0.09$ (loại vì giá trị âm) và $t_2 = 2,58$. Như vậy, quả bóng chạm đất sau gần 2,58 giây.

- *Giai đoạn 3 (Hiểu và thông dịch).* Giáo viên hướng dẫn học sinh đưa ra nhận xét: Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng. Ta có thể xác định được vị trí của quả bóng (về độ cao so với mặt đất và so với vị trí quả bóng được đá lên) ở một thời điểm bất kì trong quá trình chuyển động và sau bao lâu thì quả bóng chạm đất.

- *Giai đoạn 4 (Đối chiếu thực tế).* Trong thực tế, chuyển động của quả bóng còn phụ thuộc vào rất nhiều yếu tố như: nhiệt độ môi trường, sức cản của không khí,… Trong những trường hợp không đòi hỏi sự chính xác quá cao thì ta có thể bỏ qua các yếu tô của môi trường và coi chuyển động của quả bóng là một phần của đường parabol. Giáo viên yêu cầu nhóm học sinh tìm các chuyển động khác có quỹ đạo là một phần của parabol, như: Quỹ đạo của nước rơi của vòi phun nước, đường đi của quả bóng rổ, đường đi của đạn đại bác...

2.4.2. Biện pháp 2: Tạo tình huống yêu cầu phân tích mô hình dựa trên biểu đồ, đồ thị với số liệu thực tế

Qua biện pháp này học sinh có thể phát triển được các thành tố mô hình hoá sau đây: 1) Xác định được yếu tố trọng tâm của tình huống, sử dụng ngôn ngữ toán học để chuyển đổi các bài toán thực tiễn sang dạng toán học và giải quyết bài toán trong mô hình được thiết lập (N1); 2) Thiết lập mối quan hệ giữa các yếu tố bài toán bằng các mệnh đề Toán học, các biểu thức chứa biến, đồ thị, biểu đồ (N2); 3) Giải toán trên mô hình, dựa vào lời giải bài toán nêu ra được kết quả của mô hình (N4); iv) Kiểm tra, đối chiếu kết quả sau khi giải bài toán (N5).

Ví dụ 2: Khi một con tàu vũ trụ được phóng lên Mặt Trăng, trước hết nó bay vòng quanh Trái Đất. Sau đó, đến một thời điểm thích hợp, động cơ bắt đầu hoạt động đưa con tàu bay theo quỹ đạo là một nhánh Parabol lên Mặt Trăng (trong hệ toạ độ Oxy, x và y tính đơn vị nghìn kilomet). Biết rằng, khi động cơ bắt đầu hoạt động tức là khi x = 0 thì y = –7, sau đó ta có y = –4 khi x = 10 và y = 5 khi x = 20.

a) Tìm hàm số bậc hai có đồ thị chứa nhánh parabol nói trên.

b) Theo lịch trình, để đến được Mặt Trăng, con tàu phải đi qua điểm có toạ độ (100;y) với $y = 294 \pm 1,5$. Hỏi điều kiện đó có được thoả mãn hay không?

Qua hoạt động này, học sinh được rèn luyện các kĩ năng sau đây: 1) Thiết lập và biểu diễn đồ thị của hàm số bậc hai (tương thích với N1-N2); 2) Kĩ năng mô tả những tình huống thực tiễn bằng công cụ Toán học (N3); 3) Kĩ năng giải bài toán liên quan đến tìm khoảng giá trị của hàm số bậc hai (N4);

Lời giải:

- *Giai đoạn 1 (Toán học hóa).* Các nhóm nhận nhiệm vụ, ta cần tìm hàm số bậc hai có đồ thị chứa nhánh parabol nói trên. Tức là tìm hiểu phương pháp biểu diễn y theo x, trong trường hợp này Ox là vĩ tuyến gốc và Oy là kinh tuyến gốc. Học sinh trao đổi, thảo luận tìm ra y là một hàm số của đối số x, xác định với mọi $x \geq 0$ và phác thảo vị trí của các điểm thuộc đồ thị hàm số.

- *Giai đoạn 2 (Giải toán.* Ta cần tìm hàm số dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn điều kiện là $f(0) = c = -7$; $f(10) = 100a + 10b - 7 = -4$; $f(20) = 400a + 20b - 7 = 5$.

Từ đó suy ra $a = 0,03;\ b = 0$. Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = 0.03x^2 - 7$.

- *Giai đoạn 3 (Hiểu và thông dịch). Giáo viên* hướng dẫn học sinh đưa ra nhận xét: Quỹ đạo chuyển động của con tầu vũ trụ là một nhánh Parabol trong mặt phẳng. Ta có thể xác định được vị trí của con tầu ở một thời điểm bất kì trong quá trình chuyển động. Theo điều kiện khi $x = 100$ thì $y = 294 \pm 1.5$, tức là: $294 - 1.5 \leq y \leq 294 + 1.5$ hay $y \in (292.5; 295.5)$. Ta thấy, $f(100) = 293$ thoả mãn điều kiện đó.

- *Giai đoạn 4 (Đối chiếu thực tế).* Giáo viên yêu cầu nhóm học sinh tìm các chuyển động của các con tầu vũ trụ khi được phóng vào trong không gian, thực tế chuyển động của các con tầu vũ trụ ở những giai đoạn khác nhau có thể chuyển động theo các quỹ đạo và đường thẳng, nhánh parabol hoặc elip.

Ví dụ 3: Một hãng taxi quy định giá thuê xe đi mỗi kilômét là 6 nghìn đồng đối với 10 km đầu tiên và 2,5 nghìn đồng đối với các kilômét tiếp theo. Một hành khách thuê taxi đi quãng đường x kilômét phải trả số tiền là y nghìn đồng. Khi đó, y là một hàm số của đối số x, xác định với mọi $x \geq 0$.

a) Hãy biểu diễn mối quan hệ giữa y và x ứng với $x \in [0;\ 10]$ và khoảng $x \in (10; +\infty)$.

b) Tính $f(8), f(10), f(18)$. Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và lập bảng biến thiên của nó.

- Qua hoạt động này, học sinh được rèn luyện các kĩ năng sau đây: 1) Chuyển đổi từ ngôn ngữ thực tiễn sang ngôn ngữ Toán học, lựa chọn được công thức xác định hàm bậc nhất mà phù hợp với tình huống xuất hiện trong bài toán thực tiễn (N1); 2) Đặt ẩn, xác định được mối tương quan hàm bậc nhất giữa các yếu tố trong bài toán thực tiễn (N3); 3) Giải quyết được những vấn đề Toán học trong mô hình hàm bậc nhất vừa được thiết lập để trả lời cho bài toán thực tiễn (N4); 4) Đánh giá được lời giải trong ngữ cảnh thực tế và cải tiến được mô hình nếu cách giải quyết không phù hợp, hướng tới lí giải được tính đúng đắn của lời giải (N5).

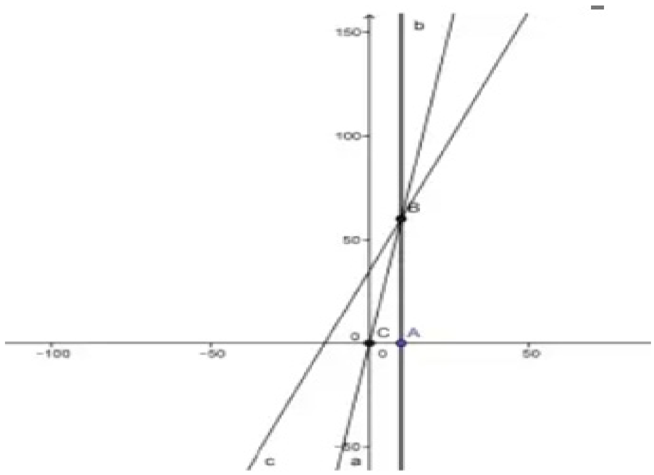
Tiến trình hoạt động:

- *Giai đoạn 1 (Toán học hóa).* Giáo viên chia lớp thành các nhóm, khoảng 6 đến 8 học sinh một nhóm. Các nhóm nhận nhiệm vụ, tìm hiểu phương pháp biểu diễn y theo x. Học sinh trao đổi, thảo luận tìm ra y là một hàm số của đối số x, xác định với mọi $x \geq 0$ và phác thảo vị trí của các điểm thuộc đồ thị hàm số.

- *Giai đoạn 2 (Giải bài toán).* Các nhóm thảo luận biểu diễn hàm số y theo x, với mọi $x \geq 0$ như sau: Khi $0 \leq x \leq 10$, tức là quãng đường đi nằm trong 10 km đầu tiên, số tiền phải trả là $y = 6x$.

Khi $x > 10$, số tiền phải trả là

$y = 6.10 + (x - 10).2,5 = 2,5x + 35.$



Hình 1: Đồ thị minh họa cho bài toán trong ví dụ 3

- *Giai đoạn 3 (Hiểu và thông dịch):* Sau khi giải xong vấn đề, học sinh biết được rằng, y là hàm số bậc nhất của đối số x và được biểu diễn dưới dạng:

$$y = f(x) = \begin{cases} 6x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 10 \\ 2.5x + 35 & x > 10 \end{cases}$$

. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ vẽ được như Hình 1.

- *Giai đoạn 4 (Đối chiếu thực tế).* Sau khi tìm ra dạng biểu diễn của y, giáo viên yêu cầu các nhóm tính số tiền mà hành khách phải trả khi đi những quãng đường tương ứng với x = 8, x = 10, x = 18,...

Nhóm học sinh đưa ra nhận xét: Khi hành khách muốn đi quãng đường xác định thì sẽ tính được trước số tiền phải trả. Hàm số y = f(x) là hàm số đồng biến. Do vậy, càng đi xa thì số tiền hành khách phải trả nhiều hơn. Tuy nhiên, khách hàng nhận thấy khi đi số kilômét nhiều hơn thì số tiền trung bình tính trên 1 kilômét sẽ rẻ hơn.

3. Kết luận

Năng lực mô hình hóa Toán học là một trong các năng lực quan trọng của con người và có thể coi là trình độ bậc cao của năng lực giải quyết vấn đề Toán học. Bởi vì, xét cho cùng, để giải quyết các vấn đề phức tạp của cuộc sống, con người thường cần sử dụng một mô hình để nghiên cứu thử nghiệm trước khi đưa ra kết luận chính thức. Do vậy, phát triển năng lực mô hình hóa Toán học cho học sinh chính là góp phần giúp họ phát triển năng lực giải quyết vấn đề Toán học. Việc phát triển năng lực mô hình hóa là công việc phức tạp, đòi hỏi nhiều công sức của giáo viên và học sinh, các giải pháp: Rèn luyện cho học sinh kĩ năng chuyển ngôn ngữ tự nhiên sang ngôn ngữ Toán học và kĩ năng xác định các biến số, tham số liên quan và mối liên hệ giữa các biến số; Tạo tình huống yêu cầu phân tích mô hình dựa trên biểu đồ, đồ thị với số liệu thực tế chỉ là một trong các giải pháp nhỏ để vừa giúp học sinh thu nhận được những kiến thức cơ bản về hàm số, hiểu được giá trị của kiến thức hàm số, đồng thời phát triển được năng lực mô hình hóa, năng lực giải quyết vấn đề.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Thị Tân An, (2012), *Sự cần thiết của mô hình hoá trong dạy học Toán,* Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, số 37.

[2] Bộ Giáo dục và Đào tạo, (26/12/2018), *Chương trình Giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể* (Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT).

[3] Lê Thị Hoài Châu, (2014), *Mô hình hóa trong dạy học đạo hàm*, Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.

[4] Nguyễn Bá Kim, (2002), *Phương pháp dạy học môn Toán,* NXB Giáo dục, Hà Nội.

[5] Nguyễn Thị Nga, (2014), *Bàn về vấn đề dạy học mô hình hóa ở trường phổ thông*, Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

[6] Aristides C. Barreto, (2010), *Reference Center for Mathematical Modeling in Teaching*, Brazilian Precursors.

[7] Biembengut, M. S. & Hein, N, (2007), *Modelling in engineering: Advantages and difficulties*, Proceedings of International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Application, Horwood Publishing.

[8] Blum, W. & Leib D, (2006), *How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? The example "Sugarloaf"*, In Haines, C. Galbraith P., Blum, W. and Khan, S., Mathematical modeling (ICTMA 12): Education engineering and economics Chichester: Horwood Publishiong, p.222 -231.

[9] Blum, M., Jensen T, (2007), *What's all the fuss about competencies?* In W.Blum, P.L.Galbraith, H.Henn, M.Niss, (Eds): Modelling and Applications in Mathematics Education (ICMI Study 14), 45 - 56, Springer.

[10] Mellar, R. Bliss, R. Booha, J. Ogborn, & C. Tompsett (Eds.*), Learning with artificial worlds: Computer based modelling in the curriculum* (pp. 11-15). London: Falmer press.

[11] Nguyen Danh Nam, (2016), *Modelling in Vietnamese School Mathematics*, International Journal of Learning and Educational Research, Vol. 15, No. 6.

[12] Ogborn, J, (1994), *Overview: the nature of modelling*, In J.

[13] Pollak, H, (1979), *The interaction between mathematics and other school subjects*, New Trends in Mathematics Teaching IV, p.232-248.

[14] Stillman, Browwn & Galbraith, (2008), *Research into teaching and learning of application and modling in Australia.*

[15] Swetz F., & Hartzler, J. S. (Eds), (1991), *Mathematical modelling in the secondary school curriculum*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

DEVELOPING THE MODELLING CAPABILITY FOR STUDENTS IN TEACHING FUNCTIONS AT GRADE 10

Cao Thi Ha*[1], Nguyen Xuan Dung[2]

* Corresponding author
[1] Email: caoha@vnu.edu.vn
VNU University of Education, Vietnam National University, Hanoi
144 Xuan Thuy, Cau Giay, Hanoi, Vietnam

[2] Email: xudung1997@gmail.com
Vietnam - Poland High School
No.01, Lane 48, Ngoc Hoi street, Hoang Mai, Hanoi, Vietnam

ABSTRACT: *This article systematically presents the concepts of Mathematical modelling and modelling capability. It also analyzes the role and potential of functions in developing students' modelling capacity and suggests some solutions to develop such skills for students while teaching grade 10 students.*

KEYWORDS: Modelling, Mathematical modelling, capability, modelling capability, functions.