

TEACHING THE TOPIC OF THREE CONIC SECTIONS TOWARDS DEVELOPING STUDENTS' MATHEMATICAL THINKING AND REASONING COMPETENCE

Pham Van Quy

Email: phamvanquycqt@gmail.com

Hung Vuong High School
Cach Mang Thang Tam street,
Phu My Residential Area, Binh Phuoc ward,
Dong Nai city, Vietnam

Received: 15/11/2025

Revised: 16/3/2026

Accepted: 10/5/2026

Published: 15/7/2026

Abstract: This paper presents an approach to teaching the topic of three conic sections (ellipse, hyperbola, and parabola) in Grade 10 Mathematics with the aim of developing students' mathematical thinking and reasoning competence, in alignment with the 2018 Mathematics General Education Curriculum of Vietnam. Based on a review of studies related to mathematical thinking and reasoning competence, an analysis of the curriculum requirements, and an examination of the content of the topic of three conic sections, the paper proposes three teaching measures: 1) Designing learning situations to develop students' analytical, synthetic, and mathematical reasoning skills; 2) Designing learning situations to foster generalization; 3) Designing learning situations to foster specialization. These measures are illustrated through specific teaching situations within the topic of three conic sections and contribute to the development of students' mathematical thinking and reasoning competence.

Keywords: *Three conic sections, mathematical thinking and reasoning competence, thinking operations, Grade 10 Mathematics teaching.*

DẠY HỌC CHỦ ĐỀ BA ĐƯỜNG CONIC THEO HƯỚNG PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC CHO HỌC SINH

Phạm Văn Quý

Email: phamvanquycqt@gmail.com

Trường Trung học phổ thông Hùng Vương
Đường Cách Mạng Tháng Tám, khu phố Phú Mỹ,
phường Bình Phước, Thành phố Đồng Nai,
Việt Nam

Nhận bài: 15/11/2025

Chỉnh sửa xong: 16/6/2026

Chấp nhận đăng: 10/5/2026

Xuất bản: 15/7/2026

Tóm tắt: Bài viết trình bày việc dạy học chủ đề Ba đường conic (Elip, hypebol, parabol) ở Toán 10 theo hướng phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học cho học sinh, phù hợp với Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 môn Toán. Trên cơ sở tổng quan các nghiên cứu liên quan đến năng lực tư duy và lập luận Toán học, phân tích yêu cầu của Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 môn Toán và nghiên cứu nội dung chủ đề Ba đường conic, bài viết đề xuất ba biện pháp dạy học gồm: 1) Thiết kế các tình huống dạy học để rèn luyện thao tác phân tích, tổng hợp và lập luận Toán học; 2) Thiết kế các tình huống dạy học để rèn luyện thao tác khái quát hóa; 3) Thiết kế các tình huống dạy học để rèn luyện thao tác đặc biệt hóa. Các biện pháp được minh họa thông qua những tình huống dạy học cụ thể trong chủ đề Ba đường conic và góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học cho học sinh.

Từ khóa: *Ba đường conic, năng lực tư duy và lập luận Toán học, thao tác tư duy, dạy học Toán 10.*

1. Đặt vấn đề

Tư duy và lập luận được xem là một trong những thành phần cốt lõi của năng lực Toán học. Polya (1945) cho rằng, dạy học Toán cần chú trọng phát triển tư duy giải quyết vấn đề của học sinh thông qua các hoạt động tìm tòi, phân tích và suy luận Toán học. Theo OECD (2023), lập luận Toán học giữ vai trò trung tâm trong năng lực Toán học, giúp học sinh giải thích, đánh giá và đưa ra các kết luận Toán

học trong những bối cảnh khác nhau. Điều này cho thấy, việc phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học là một yêu cầu quan trọng của dạy học Toán ở trường phổ thông.

Nhiều nghiên cứu trong và ngoài nước đã khẳng định vai trò quan trọng của tư duy và lập luận trong dạy học môn Toán. Theo NCTM (National Council of Teachers of Mathematics - Hội đồng giáo viên Toán Quốc gia Hoa Kỳ, 2000), việc học Toán cần tạo

cơ hội để học sinh hình thành giả thuyết, xây dựng, đánh giá và chứng minh các lập luận Toán học. Niss (2003) cũng nhấn mạnh rằng, tư duy Toán học và lập luận Toán học là những thành tố cơ bản của năng lực Toán học, giữ vai trò quan trọng trong việc hình thành khả năng phân tích, suy luận và giải quyết vấn đề. Ở Việt Nam, Nguyễn Bá Kim (2015), Phạm Văn Hoàn, Nguyễn Gia Cốc và Trần Thúc Trình (1981) đều khẳng định sự cần thiết của việc tổ chức các hoạt động học tập nhằm phát triển tư duy Toán học và lập luận logic cho học sinh.

Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 được xây dựng theo định hướng phát triển phẩm chất và năng lực người học. Trong môn Toán, năng lực Toán học là mục tiêu trọng tâm của quá trình dạy học và được cấu thành bởi năm thành tố cốt lõi, gồm: tư duy và lập luận Toán học, mô hình hóa Toán học, giải quyết vấn đề Toán học, giao tiếp Toán học và sử dụng công cụ, phương tiện học toán (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018).

Sau khi Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 được ban hành, nghiên cứu về năng lực tư duy và lập luận Toán học đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà giáo dục. Các công trình chủ yếu hướng tới việc xác định biểu hiện của năng lực này và đề xuất các biện pháp phát triển năng lực thông qua những chủ đề cụ thể của môn Toán. Mặc dù đã đạt được những kết quả nhất định, tổng quan của Nguyễn Thị Mỹ Hằng và cộng sự (2025) cho thấy phạm vi nghiên cứu vẫn chưa bao quát đầy đủ các nội dung của Chương trình môn Toán phổ thông. Trong số các chủ đề chưa được quan tâm, Ba đường conic ở lớp 10 là một khoảng trống nghiên cứu đáng chú ý, khi chưa có công trình nào tiếp cận theo hướng phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học.

Xuất phát từ khoảng trống nghiên cứu đó, bài viết tập trung nghiên cứu việc dạy học chủ đề Ba đường conic theo hướng phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học cho học sinh lớp 10. Trên cơ sở xác định các biểu hiện của năng lực này trong dạy học chủ đề, bài viết đề xuất một số biện pháp sư phạm nhằm góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học cho học sinh.

2. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu được thực hiện thông qua hai phương pháp chủ yếu là phân tích tài liệu và thiết kế giáo dục. Phương pháp phân tích tài liệu được sử dụng nhằm nghiên cứu cơ sở lí luận của năng lực tư duy và lập luận Toán học, các yêu cầu cần đạt của Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 môn Toán và nội dung của chủ đề Ba đường conic. Kết quả phân tích là cơ sở để

xác định những biểu hiện của năng lực tư duy và lập luận Toán học cần được chú trọng trong quá trình tổ chức dạy học chủ đề này. Dựa trên các kết quả đó, phương pháp thiết kế giáo dục được sử dụng để đề xuất các biện pháp sư phạm và xây dựng các ví dụ minh họa nhằm góp phần phát triển năng lực này cho học sinh.

3. Kết quả nghiên cứu

3.1. Cơ sở lí luận của vấn đề nghiên cứu

3.1.1. Năng lực

Khái niệm năng lực được tiếp cận theo nhiều góc độ khác nhau. OECD (2002) nhấn mạnh năng lực là khả năng đáp ứng thành công các yêu cầu phức hợp trong những bối cảnh cụ thể. Nguyễn Quang Uẩn (2007) xem năng lực là tổ hợp các thuộc tính tâm lí của cá nhân bảo đảm cho hoạt động đạt hiệu quả. Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 xác định năng lực là thuộc tính cá nhân được hình thành và phát triển thông qua quá trình học tập, rèn luyện, cho phép huy động tổng hợp kiến thức, kĩ năng và các thuộc tính cá nhân khác để thực hiện thành công một hoạt động nhất định. Mặc dù có những cách tiếp cận khác nhau, các quan niệm trên đều nhấn mạnh năng lực là khả năng huy động tổng hợp các nguồn lực cá nhân nhằm thực hiện hiệu quả các hoạt động trong những điều kiện cụ thể. Trong nghiên cứu này, năng lực được hiểu là khả năng huy động tổng hợp kiến thức, kĩ năng và các thuộc tính cá nhân khác để thực hiện thành công một hoạt động hoặc giải quyết hiệu quả một nhiệm vụ trong những điều kiện cụ thể.

3.1.2. Năng lực tư duy và lập luận Toán học

Năng lực tư duy và lập luận Toán học được quan tâm trong nhiều nghiên cứu về giáo dục Toán học. Mặc dù có những cách tiếp cận khác nhau, các nghiên cứu đều nhấn mạnh vai trò của các hoạt động tư duy, lập luận, giải thích và chứng minh trong quá trình học tập Toán học. Theo NCTM (2000), năng lực tư duy và lập luận Toán học thể hiện qua việc nhận ra rằng lập luận và chứng minh là nền tảng của Toán học; hình thành - khảo sát giả thuyết; phát triển và đánh giá lập luận/chứng minh; lựa chọn và sử dụng các kiểu lập luận khác nhau. Còn theo Gonzalez và cộng sự (2021), năng lực tư duy và lập luận Toán học là khả năng kết luận, phân tích, đánh giá, khái quát hóa, kết nối, tích hợp, tìm giải pháp cho các vấn đề. Theo OECD (2023), trong khung đánh giá Toán học PISA 2022, năng lực lập luận Toán học được xem là thành tố trung tâm của năng lực Toán học, thể hiện qua khả năng giải thích, đánh giá, đưa ra kết luận và

sử dụng Toán học để giải quyết vấn đề trong các bối cảnh khác nhau.

Trong nghiên cứu về năng lực Toán học, Niss (2003) đề xuất khung gồm tám năng lực thành phần, trong đó năng lực tư duy Toán học và năng lực lập luận Toán học là hai thành phần quan trọng. Năng lực tư duy Toán học thể hiện ở khả năng đặt câu hỏi, khái quát hóa, đặc biệt hóa và nhận diện bản chất Toán học của vấn đề. Năng lực lập luận Toán học thể hiện ở khả năng theo dõi, đánh giá và xây dựng các lập luận Toán học. Cách tiếp cận này cho thấy tư duy và lập luận có mối quan hệ chặt chẽ trong cấu trúc năng lực Toán học. Ngoài ra, Yavuz-Mumcu & Aktürk (2017) cũng cho rằng, năng lực tư duy và lập luận Toán học bao gồm hai năng lực riêng biệt, tuy nhiên hai tác giả này cũng nhấn mạnh kỹ năng lập luận Toán học phải đặt trong bối cảnh các quá trình của tư duy Toán học và xem lập luận Toán học như thành phần của quá trình của tư duy Toán học.

Các biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học không tồn tại tách biệt mà có mối quan hệ chặt chẽ với nhau. Các thao tác tư duy như phân tích, tổng hợp, khái quát hóa hay đặc biệt hóa tạo cơ sở để hình thành các lập luận Toán học. Ngược lại, lập luận Toán học giúp kiểm chứng, giải thích và hoàn thiện kết

quả của quá trình tư duy. Trong khuôn khổ nghiên cứu này, năng lực tư duy và lập luận Toán học được hiểu theo quan niệm của Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 môn Toán. Theo đó, năng lực tư duy và lập luận Toán học của học sinh trung học phổ thông được thể hiện thông qua các biểu hiện sau: Thực hiện được tương đối thành thạo các thao tác tư duy, đặc biệt phát hiện được sự tương đồng và khác biệt trong những tình huống tương đối phức tạp và lí giải được kết quả của việc quan sát; Sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để nhìn ra những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề; Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề. Giải thích, chứng minh, điều chỉnh được giải pháp thực hiện về phương diện Toán học.

3.2. Một số biểu hiện của năng lực tư duy và lập luận Toán học của học sinh khi dạy học chủ đề Ba đường conic

Căn cứ vào các yêu cầu cần đạt trong dạy học chủ đề Ba đường conic Toán 10 và biểu hiện năng lực tư duy và lập luận Toán học của học sinh trung học phổ thông theo Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 môn Toán, tác giả đề xuất các biểu hiện nổi bật của năng lực tư duy và lập luận Toán học ở học sinh khi học tập chủ đề này như sau (xem Bảng 1).

Bảng 1: Biểu hiện nổi bật của năng lực tư duy và lập luận Toán học khi dạy học chủ đề Ba đường conic

Biểu hiện năng lực tư duy và lập luận Toán học của học sinh trung học phổ thông	Biểu hiện năng lực tư duy và lập luận Toán học của học sinh trung học phổ thông trong dạy học chủ đề “Ba đường conic”
Thực hiện được tương đối thành thạo các thao tác tư duy, đặc biệt phát hiện được sự tương đồng và khác biệt trong những tình huống tương đối phức tạp và lí giải được kết quả của việc quan sát.	- Chỉ ra được những điểm giống nhau, khác nhau giữa elip, hypebol và parabol thông qua định nghĩa, hình dạng, phương trình và các yếu tố đặc trưng của từng đường conic. - Phân tích được mối liên hệ giữa các yếu tố đặc trưng của từng đường conic, từ đó nhận diện các thuộc tính bản chất và điều kiện xác định của elip, hypebol và parabol. - Tổng hợp các kết quả quan sát, so sánh và phân tích; phát hiện các đặc điểm chung để khái quát hóa thành khái niệm, tính chất của Ba đường conic, đồng thời thực hiện được thao tác đặc biệt hóa trong những trường hợp cụ thể khi giải toán để đi tìm ra bản chất của vấn đề.
Sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để nhìn ra những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề.	- Sử dụng chứng cứ và lí lẽ Toán học để giải thích, bảo vệ hoặc bác bỏ một nhận định liên quan đến Ba đường conic. - Vận dụng lập luận quy nạp và suy diễn để xác định các yếu tố đặc trưng, thiết lập phương trình và chứng minh tính chất của Ba đường conic. - Đề xuất và đánh giá các cách giải khác nhau đối với một bài toán về Ba đường conic trước khi đưa ra kết luận.
Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề. Giải thích, chứng minh, điều chỉnh được giải pháp thực hiện về phương diện Toán học.	- Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết các bài toán về Ba đường conic. - Giải thích được, chứng minh được, điều chỉnh được giải pháp thực hiện khi giải quyết các bài toán về Ba đường conic theo phương diện Toán học.

3.3. Một số biện pháp rèn luyện năng lực tư duy và lập luận Toán học của học sinh khi dạy học chủ đề ba đường conic

3.3.1. Thiết kế tình huống dạy học để rèn luyện thao tác phân tích, tổng hợp và lập luận Toán học

a. Mục đích

Giúp học sinh nhận diện các dữ kiện, xác định mối quan hệ giữa các yếu tố của bài toán và liên kết các kết quả thu được để hình thành hướng giải quyết vấn đề trong chủ đề Ba đường conic. Thông qua quá trình phân tích, tổng hợp và sử dụng các chứng cứ, lí lẽ Toán học để giải thích, bảo vệ kết luận, học sinh từng bước phát triển tư duy logic, năng lực lập luận và khả năng giải quyết các bài toán mới.

b. Cách thực hiện

- Giáo viên xây dựng các tình huống học tập hoặc bài toán có vấn đề về chủ đề Ba đường conic, trong đó học sinh phải phân tích dữ kiện, xác định yếu tố đã biết, yếu tố cần tìm và mối quan hệ giữa chúng.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh tổng hợp các kết quả thu được từ quá trình phân tích, thiết lập mối liên hệ giữa các dữ kiện của bài toán và các kiến thức Toán học liên quan; từ đó xây dựng hướng giải quyết phù hợp.

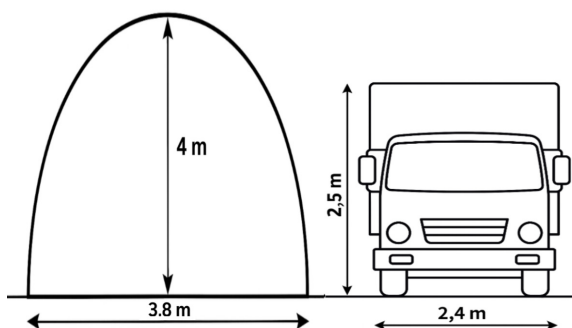
- Giáo viên tổ chức cho học sinh trình bày lời giải, giải thích các bước thực hiện và sử dụng các chứng cứ, lí lẽ Toán học để bảo vệ kết luận của mình; đồng thời khuyến khích học sinh trao đổi, phản biện và điều chỉnh các lập luận chưa phù hợp.

c. Ví dụ minh họa

Một cái cổng hình parabol cao 4 mét, chân cổng rộng 3,8 mét. Một chiếc xe tải rộng 2,4 mét và cao 2,5 mét có thể đi qua cổng được hay không? (xem Hình 1).

Sau khi cho học sinh tìm hiểu bài toán, giáo viên tổ chức rèn luyện thao tác phân tích và thao tác tổng hợp như sau:

- Giáo viên yêu cầu học sinh xác định các dữ kiện của bài toán gồm chiều cao của cổng là 4m, chiều



Hình 1: Minh họa cổng hình parabol và xe tải.

rộng chân cổng là 3,8 m, chiều cao xe tải là 2,5 m và chiều rộng xe tải là 2,4m. Trên cơ sở đó, học sinh phân tích mối quan hệ giữa các dữ kiện và yêu cầu của bài toán, nhận thấy việc xét khả năng xe tải đi qua cổng cần dựa trên mối quan hệ giữa chiều rộng của xe tải và bề rộng của cổng tại độ cao tương ứng với chiều cao của xe tải. Đồng thời, học sinh nhận diện được tình huống thực tiễn có thể được mô hình hóa bằng một parabol, từ đó xuất hiện nhu cầu xây dựng phương trình parabol trong hệ trục tọa độ thích hợp.

Trên cơ sở các kết quả thu được từ quá trình phân tích, học sinh lựa chọn hệ trục tọa độ thích hợp với gốc tọa độ đặt tại đỉnh của parabol, trục Ox trùng với trục đối xứng của parabol như Hình 2.

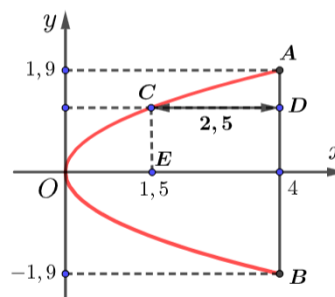
Từ các dữ kiện của bài toán, học sinh xác định được parabol đi qua ba điểm $O(0; 0)$, $A(4; 1,9)$ và $B(4; -1,9)$, từ đó thiết lập phương trình parabol biểu diễn hình dạng của cổng. Điểm C thuộc parabol sao cho độ dài đoạn CD bằng chiều cao xe tải là 2,5 m, suy ra hoành độ của điểm C bằng 1,5. Khi đã xác định được phương trình parabol và có hoành độ của điểm C, học sinh sẽ tìm được tung độ của điểm C, từ đó xác định được bề rộng của cổng tại vị trí cùng chiều cao với xe tải là C, qua đó trả lời được câu hỏi xe có đi qua cổng được hay không.

Chọn hệ trục tọa độ với gốc tọa độ đặt tại đỉnh của parabol, trục Ox trùng với trục đối xứng của parabol như hình 2. Khi đó phương trình của parabol có dạng $y^2 = 2px$, với $p > 0$. Do parabol đi

qua điểm đặc biệt $(4; 1,9)$ nên ta tìm được $p = \frac{361}{800}$,

suy ra phương trình của parabol là $y^2 = \frac{361}{400}x$. Gọi

C là vị trí thuộc parabol, D là hình chiếu của C trên AB, sao cho độ dài CD bằng với chiều cao của xe tải, do chiều cao xe tải là 2,5 m nên hoành độ của điểm C bằng $4 - 2,5 = 1,5$. Do điểm C thuộc parabol nên thay $x = 1,5$ vào phương trình của parabol ta có



Hình 2: Minh họa gắn hệ trục tọa độ Oxy lên cổng hình parabol.

$y = \pm \frac{19\sqrt{6}}{40}$, suy ra tung độ của C là $\frac{19\sqrt{6}}{40}$, như vậy độ rộng của cổng tại vị trí bằng chiều cao của xe tải gấp đôi độ dài CE và bằng $\frac{19\sqrt{6}}{20}$ m, xấp xỉ bằng 2,33 m vẫn nhỏ hơn độ rộng của xe tải là 2,4 m nên xe tải sẽ không đi được qua cổng parabol.

Qua ví dụ trên có thể thấy, phân tích, tổng hợp và lập luận Toán học có mối quan hệ chặt chẽ, bổ trợ lẫn nhau trong quá trình giải quyết vấn đề. Phân tích giúp học sinh nhận diện các dữ kiện và mối quan hệ Toán học cần xem xét; trên cơ sở đó, tổng hợp giúp học sinh liên kết các kết quả thu được để xây dựng mô hình Toán học và hình thành hướng giải quyết bài toán. Từ những kết quả của quá trình tổng hợp, học sinh sử dụng các chứng cứ và lí lẽ Toán học để lập luận, giải thích và bảo vệ kết luận của mình. Thông qua việc thực hiện các hoạt động này, học sinh được rèn luyện các thao tác tư duy và khả năng lập luận Toán học, qua đó góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học.

3.3.2. Thiết kế các tình huống dạy học để rèn luyện thao tác khái quát hóa

a. Mục đích

Giúp học sinh nhận ra những đặc điểm chung, các quy luật và tính chất Toán học thông qua việc khảo sát các trường hợp riêng hoặc các bài toán cụ thể liên quan đến elip, hypebol và parabol, từ đó hình thành các kết luận và công thức mang tính tổng quát một cách tự nhiên, có cơ sở.

b. Cách thực hiện

- Giáo viên xây dựng các tình huống học tập hoặc bài toán cụ thể trong chủ đề Ba đường conic, yêu cầu học sinh khảo sát, thực hiện tính toán hoặc giải quyết nhiệm vụ học tập trên một số trường hợp riêng.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh so sánh, phân tích và đối chiếu các kết quả thu được từ những trường hợp đã khảo sát; từ đó phát hiện các đặc điểm chung, các quy luật hoặc mối quan hệ Toán học lặp lại.

- Giáo viên tổ chức cho học sinh dự đoán, phát biểu kết luận tổng quát và sử dụng các chứng cứ, lí lẽ

Toán học để kiểm chứng hoặc chứng minh kết luận đó; đồng thời khuyến khích học sinh trao đổi, phản biện và điều chỉnh các nhận định chưa phù hợp.

c. Ví dụ minh họa

Giáo viên đưa ra bài toán sau:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E).

- 1) Tính tích hai khoảng cách từ F_1 và F_2 đến tiếp tuyến của (E) tại đỉnh trên trục lớn.
- 2) Tính tích hai khoảng cách từ F_1 và F_2 đến tiếp tuyến của (E) tại đỉnh trên trục nhỏ.
- 3) So sánh các kết quả ở (i), (ii) và rút ra nhận xét.
- 4) Tính tích hai khoảng cách từ F_1 và F_2 đến một tiếp tuyến (Δ) bất kì của (E).

Sau khi đưa ra tình huống học tập, giáo viên hướng dẫn học sinh tìm hiểu đề bài và tổ chức thực hiện các hoạt động học tập như sau:

Hoạt động 1: Xác định các điểm đặc biệt của elip: $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$, $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(-3;0)$, $B_2(3;0)$.

Hoạt động 2: Viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại A_2 , B_2 .

Hoạt động 3: Tính khoảng cách từ F_1 và F_2 đến các tiếp tuyến của (E) trong từng trường hợp. Kết quả được trình bày trong Bảng 2.

Hoạt động 4: Qua Bảng 2, ta thấy tích khoảng cách từ F_1 và F_2 đến các tiếp tuyến của (E) trong từng trường hợp bằng nhau là 9.

Hoạt động 5: Học sinh dự đoán kết quả trong trường hợp tiếp tuyến của (E) tại điểm $M(x_0; y_0)$ bất kì thuộc elip và chứng minh dự đoán bằng lập luận. Giáo viên định hướng học sinh dự đoán $d(F_1, \Delta) \cdot d(F_2, \Delta) = 9$ và đưa ra giải thích như sau: Tiếp tuyến của (E) tại $M(x_0; y_0)$ bất kì có phương trình là

$$(\Delta): \frac{x_0 x}{25} + \frac{y_0 y}{9} = 1 \text{ hay } 9x_0 x + 25y_0 y - 225 = 0.$$

Khi đó

$$d(F_1, \Delta) \cdot d(F_2, \Delta) = \frac{|-36x_0 - 225|}{\sqrt{81x_0^4 + 225y_0^4}} \cdot \frac{|36x_0 - 225|}{\sqrt{81x_0^4 + 225y_0^4}}$$

Bảng 2: Kết quả khoảng cách từ F_1 và F_2 đến các tiếp tuyến của (E) trong từng trường hợp.

Đối tượng	Phương trình	Khoảng cách	Tích các khoảng cách
Tiếp tuyến của (E) tại A_2	$(\Delta_1): x = 5$	$d(F_1, \Delta_1) = 9; d(F_2, \Delta_1) = 1$	$d(F_1, \Delta_1) \cdot d(F_2, \Delta_1) = 9$
Tiếp tuyến của (E) tại B_2	$(\Delta_2): y = 3$	$d(F_1, \Delta_2) = 3; d(F_2, \Delta_2) = 3$	$d(F_1, \Delta_2) \cdot d(F_2, \Delta_2) = 9$

Sử dụng kết quả $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1$ và rút gọn ta có kết quả $d(F_1, \Delta).d(F_2, \Delta) = 9$.

Giáo viên tổ chức cho học sinh dự đoán, phát biểu kết luận tổng quát và chứng minh.

Hoạt động 6: Khái quát hóa kết quả cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$. Giáo viên hướng dẫn học sinh dự đoán tích các khoảng cách từ F_1, F_2 đến một tiếp tuyến bất kì bằng b^2 .

Thật vậy, ta có hai tiêu điểm của elip là $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$. Tiếp tuyến của (E) tại điểm $M(x_0; y_0)$

là $(\Delta): \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - a^2 b^2 = 0$.

Tích các khoảng cách F_1, F_2 đến (Δ) là $P = \frac{|-b^2 x_0 c - a^2 b^2|}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}} \cdot \frac{|b^2 x_0 c - a^2 b^2|}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}} = \frac{b^4 |x_0^2 c^2 - a^4|}{b^4 x_0^2 + a^2 (a^2 y_0^2)}$.

Do $M \in (E)$ nên ta có $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$, khi đó

$P = \frac{b^4 |x_0^2 (a^2 - b^2) - a^4|}{b^4 x_0^2 + a^2 (a^2 b^2 - b^2 x_0^2)} = \frac{b^4 |a^2 x_0^2 - b^2 x_0^2 - a^4|}{b^2 (b^2 x_0^2 + a^4 - a^2 x_0^2)} = b^2$.

Qua ví dụ trên, học sinh được trải nghiệm quá trình chuyển từ việc khảo sát các trường hợp riêng đến phát hiện quy luật, hình thành dự đoán và xây dựng kết luận tổng quát. Trong quá trình đó, khái quát hóa và lập luận Toán học có mối quan hệ chặt chẽ với nhau: khái quát hóa giúp học sinh hình thành dự đoán từ các trường hợp cụ thể, còn lập luận Toán học giúp kiểm chứng và khẳng định tính đúng đắn của kết luận tổng quát. Thông qua các hoạt động này, học sinh được rèn luyện thao tác khái quát hóa, khả năng lập luận và tư duy Toán học.

3.3.3. Thiết kế các tình huống dạy học để rèn luyện thao tác đặc biệt hóa

a. Mục đích

Giúp học sinh làm sáng tỏ và hiểu sâu hơn bản chất của các định lý, tính chất và công thức trong chủ đề Ba đường conic thông qua việc xem xét các trường hợp đặc biệt; từ đó nhận thấy mối liên hệ giữa trường hợp tổng quát và các trường hợp cụ thể.

b. Cách thực hiện

- Giáo viên giới thiệu một định lý, tính chất, công thức hoặc bài toán tổng quát trong chủ đề Ba đường conic.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh xét một số trường hợp đặc biệt của định lý, tính chất, công thức hoặc bài

toán tổng quát bằng cách lựa chọn các giá trị, điều kiện hoặc vị trí đặc biệt; từ đó xác định các kết quả tương ứng.

- Giáo viên tổ chức cho học sinh đối chiếu kết quả thu được ở các trường hợp đặc biệt với trường hợp tổng quát; từ đó giải thích và làm rõ bản chất của kiến thức Toán học.

c. Ví dụ minh họa

Giáo viên phát biểu bài toán tổng quát sau:

Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$ và điểm

$M(x_0; y_0) \in (H)$. Gọi Δ_1, Δ_2 là hai đường tiệm cận của (H). Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (H) không đổi.

Giáo viên hướng dẫn học sinh giải quyết bài toán trong trường hợp tổng quát.

Hai đường tiệm cận của (H) là $\Delta_1: bx - ay = 0$ và $\Delta_2: bx + ay = 0$. Khi đó $d(M, \Delta_1) = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$d(M, \Delta_2) = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Suy ra $d(M, \Delta_1).d(M, \Delta_2) = \frac{|b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2|}{a^2 + b^2}$,

do $M(x_0; y_0) \in (H)$ nên $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ hay

$b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2$.

Vì vậy, $d(M, \Delta_1).d(M, \Delta_2) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

Giáo viên hướng dẫn học sinh xét một số vị trí đặc biệt của điểm M trên hypebol. Kết quả tính khoảng cách từ các điểm này đến hai đường tiệm cận được trình bày trong Bảng 3.

Từ Bảng 3, học sinh nhận thấy các kết quả thu được ở những trường hợp đặc biệt đều phù hợp với công thức tổng quát đã chứng minh. Qua đó, học sinh hiểu rõ hơn ý nghĩa của kết quả tổng quát: tích khoảng cách từ một điểm thuộc hypebol đến hai đường tiệm cận là một đại lượng không đổi, được xác định bởi các hệ số a và b của hypebol.

Qua ví dụ trên, học sinh được rèn luyện thao tác đặc biệt hóa thông qua việc xem xét các trường hợp đặc biệt của bài toán tổng quát. Việc đối chiếu kết quả thu được ở các trường hợp đặc biệt với kết quả tổng quát giúp học sinh làm sáng tỏ bản chất của

Bảng 3: Kết quả khảo sát một số trường hợp đặc biệt của điểm M trên hypebol

Trường hợp đặc biệt	Các khoảng cách	Tích các khoảng cách
$M_1(a;0)$	$d(M_1,\Delta_1)=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, d(M_1,\Delta_2)=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$d(M_1,\Delta_1).d(M_1,\Delta_2)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$
$M_2(-a;0)$	$d(M_2,\Delta_1)=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, d(M_2,\Delta_2)=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$d(M_2,\Delta_1).d(M_2,\Delta_2)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$
$M_3(a\sqrt{2};b)$	$d(M_3,\Delta_1)=\frac{ab(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}, d(M_3,\Delta_2)=\frac{ab(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$d(M_3,\Delta_1).d(M_3,\Delta_2)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$
$M_4(a\sqrt{2};-b)$	$d(M_4,\Delta_1)=\frac{ab(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{a^2+b^2}}, d(M_4,\Delta_2)=\frac{ab(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$d(M_4,\Delta_1).d(M_4,\Delta_2)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

kiến thức Toán học, hiểu rõ hơn mối liên hệ giữa trường hợp tổng quát và các trường hợp cụ thể. Qua đó góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học.

4. Kết luận

Nghiên cứu đã xác định một số biểu hiện của năng lực tư duy và lập luận Toán học trong dạy học chủ đề Ba đường conic ở lớp 10, đồng thời đề xuất ba biện pháp sư phạm nhằm tạo cơ hội cho học sinh thực hiện các thao tác tư duy như phân tích, tổng hợp, khái quát hóa và đặc biệt hóa, cũng như hình thành

và phát triển khả năng lập luận Toán học trong quá trình học tập. Các biện pháp được đề xuất không chỉ góp phần cụ thể hóa định hướng phát triển năng lực trong Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 môn Toán mà còn cung cấp cho giáo viên những gợi ý trong việc thiết kế các tình huống học tập nhằm phát huy vai trò chủ động của học sinh. Thông qua các hoạt động phân tích, tổng hợp, khái quát hóa, đặc biệt hóa và lập luận Toán học, học sinh có cơ hội hiểu sâu hơn bản chất của các kiến thức về elip, hypebol và parabol, đồng thời phát triển tư duy Toán học và khả năng giải quyết vấn đề.

Tài liệu tham khảo

Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018). *Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán* (Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT, ngày 26 tháng 12 năm 2018). NXB Giáo dục Việt Nam.

González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M. & Puertas, M. L. (2021). Characterizing levels of reasoning in graph theory. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(8), em1990. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11020>

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author.

Nguyễn Bá Kim. (2015). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.

Nguyễn Quang Uẩn. (2007). *Tâm lý học đại cương*. NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.

Nguyễn Thị Mỹ Hằng, Nguyễn Thị Xoan & Lê Thị Thảo. (2025). Một số nghiên cứu về năng lực tư duy và lập luận Toán học của học sinh phổ thông tại Việt Nam giai đoạn 2018–2024. *Tạp chí Giáo dục*, 25(7), tr.12–16.

Niss, M. A. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project*. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, pp.116-124. Hellenic Mathematical Society.

OECD. (2002). *Consolidation of the concept of competence: DeSeCo discussion paper*. OECD Publishing.

OECD. (2023). *PISA 2022 mathematics framework*. In *OECD, PISA 2022 assessment and analytical framework*, pp.55-102. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>

Phạm Văn Hoàn, Nguyễn Gia Cốc & Trần Thúc Trình. (1981). *Giáo dục học môn Toán*. NXB Giáo dục, Hà Nội.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Yavuz-Mumcu, H. & Aktürk, T. (2017). An analysis of the reasoning skills of pre-service teachers in the context of mathematical thinking. *European Journal of Education Studies*, 3(5), pp.225-254.