

RESEARCH OVERVIEW AND THEORETICAL FOUNDATIONS FOR DEVELOPING MATHEMATICAL THINKING AND REASONING THROUGH GEOMETRY TEACHING AMONG HIGH SCHOOL STUDENTS

Dinh Duc Tai¹, Pham Van Quy^{*2}

* Corresponding author

Email: phamvanquycqt@gmail.com

¹ Email: taidd@vnies.edu.vn

Vietnam Education Strategy

and Policy Institute

101 Tran Hung Dao, Cua Nam ward,

Hanoi, Vietnam

² Hung Vuong High School

Binh Phuoc ward, Dong Nai city, Vietnam

Received: 23/6/2026

Revised: 12/7/2026

Accepted: 25/8/2026

Published: 20/9/2026

Abstract: Mathematical thinking and reasoning constitute one of the five core components of mathematical competence in Vietnam's 2018 General education curriculum for Mathematics. Geometry provides a particularly productive context for developing high school students' reasoning, argumentation, and proof competencies. This study systematically reviews Vietnamese and international research published from 2008 to 2026 to synthesize the theoretical foundations of geometry teaching that aim to foster mathematical thinking and reasoning among high school students. Relevant studies were identified through SCOPUS, Web of Science, SpringerLink, ERIC, and Vietnamese academic journal databases. The findings demonstrate four complementary theoretical pillars: Competence-based frameworks associated with Weinert and Niss; theories of reasoning, argumentation, and proof developed by Lithner, Toulmin, and Stylianides; models of geometric cognition proposed by van Hiele, Duval, and Fischbein; and Vygotsky's social constructivist perspective. Drawing on these foundations, the study proposes an integrated analytical framework comprising three interrelated dimensions: thinking operations, argumentation structures, and processes of geometric cognition. This framework provides a theoretical basis for designing and evaluating geometry instruction that develops high school students' mathematical thinking and reasoning competence, aligned with the reform objectives of Vietnam's 2018 General education curriculum.

Keywords: *The 2018 General education curriculum, geometry teaching, mathematical reasoning, reasoning competency, high school.*

TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU VÀ CƠ SỞ LÝ LUẬN CỦA DẠY HỌC HÌNH HỌC THEO HƯỚNG PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC CHO HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Dinh Đức Tài¹, Phạm Văn Quý^{*2}

* Tác giả liên hệ

Email: phamvanquycqt@gmail.com

¹ Email: taidd@vnies.edu.vn

Viện Chiến lược và Chính sách Giáo dục

101 Trần Hưng Đạo, phường Cửa Nam,

Hà Nội, Việt Nam

² Trường Trung học phổ thông Hùng Vương

Phường Bình Phước, Thành phố Đồng Nai,

Việt Nam

Nhận bài: 23/6/2026

Chỉnh sửa xong: 12/7/2026

Chấp nhận đăng: 25/8/2026

Xuất bản: 20/9/2026

Tóm tắt: Năng lực tư duy và lập luận Toán học là một trong năm thành tố cốt lõi của năng lực Toán học trong Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018, trong đó hình học được xem là môi trường đặc biệt thuận lợi để rèn luyện suy luận và chứng minh. Bài viết thực hiện tổng quan hệ thống các công trình trong nước và quốc tế giai đoạn 2008 - 2026 trên các nguồn SCOPUS, Web of Science, Springer, ERIC và hệ thống tạp chí Việt Nam, nhằm tổng hợp cơ sở lý luận của dạy học Hình học theo định hướng phát triển năng lực tư duy và lập luận cho học sinh trung học phổ thông. Kết quả cho thấy bốn trụ cột lý luận có thể tích hợp thành một khung phân tích thống nhất: khung năng lực (Weinert; Niss), lý thuyết lập luận (Lithner; Toulmin; Stylianides), các mô hình nhận thức hình học (van Hiele; Duval; Fischbein) và quan điểm kiến tạo xã hội (Vygotsky). Bài viết đề xuất khung phân tích gồm ba yếu tố "thao tác tư duy - cấu trúc lập luận - tiến trình nhận thức hình học" nhằm làm cơ sở cho việc thiết kế biện pháp dạy học hình học theo hướng phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học cho học sinh trung học phổ thông đáp ứng yêu cầu đổi mới Chương trình Giáo dục phổ thông 2018.

Từ khóa: *Chương trình Giáo dục phổ thông 2018, dạy học hình học, lập luận Toán học, năng lực tư duy, trung học phổ thông.*

1. Đặt vấn đề

Phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học cho học sinh là một trong những mục tiêu trung tâm của giáo dục Toán học. Các kết quả nghiên cứu đều khẳng định lập luận và chứng minh là thành tố nền tảng của hiểu biết Toán học, chẳng hạn: Hội đồng Giáo viên Toán Quốc gia Hoa Kỳ khẳng định: “Lập luận và chứng minh” là một trong các chuẩn quá trình cốt lõi của giáo dục toán phổ thông (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Tại Việt Nam, định hướng đó đã được thể chế hóa qua Chương trình Giáo dục phổ thông 2018, đánh dấu sự chuyển đổi căn bản từ chương trình “định hướng nội dung” sang chương trình “định hướng phát triển phẩm chất và năng lực” (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018b). Trong Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán, năng lực Toán học được cấu trúc thành năm thành tố cốt lõi, trong đó năng lực tư duy và lập luận Toán học được đặt ở vị trí đầu tiên, cùng với năng lực mô hình hóa, năng lực giải quyết vấn đề, năng lực giao tiếp và năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018a). Trong cấu trúc nội dung môn Toán, mạch Hình học và Đo lường được chương trình xác định là nơi “Tạo cho học sinh khả năng suy luận, kĩ năng thực hiện các chứng minh Toán học, góp phần vào phát triển tư duy” (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018a). Các kết quả nghiên cứu giáo dục Toán học từ lâu đã xem hình học là “mảnh đất” thuận lợi nhất để rèn luyện lập luận và chứng minh, bởi nó kết hợp đặc thù trực quan của hình vẽ với tính chặt chẽ của hệ thống tiên đề - suy diễn (Jones, 1998).

Trong thực tế, giữa kì vọng của chương trình và thực tiễn lớp học còn tồn tại khoảng cách đáng kể. Các khảo sát thực trạng gần đây cho thấy giáo viên còn ít chú trọng rèn luyện và đánh giá các thao tác phân tích, so sánh, đặc biệt hóa, khái quát hóa và lập luận; việc dạy học vẫn nghiêng về cung cấp quy trình mẫu để học sinh ghi nhớ và bắt chước, dẫn đến việc năng lực lập luận chưa được phát triển tương xứng với yêu cầu cần đạt (Nguyễn Thị Thanh Tuyên, 2024; Nguyễn Văn Khang & Lê Hoàng Mai, 2024). Khoảng cách giữa định hướng chính sách và năng lực triển khai của giáo viên là một thách thức đã được ghi nhận (Duong và cộng sự, 2022).

Bài viết hướng tới ba mục tiêu: 1) Tổng quan có hệ thống các công trình trong nước và quốc tế liên quan đến dạy học hình học và phát triển phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học; 2) Tổng hợp và liên kết các cơ sở lí thuyết thành một khung phân tích thống nhất, khả dụng cho cấp trung học phổ thông; 3) Chỉ ra khoảng trống nghiên cứu, từ đó gợi mở định hướng cho việc xây dựng biện pháp dạy học và công cụ đánh giá.

2. Phương pháp nghiên cứu

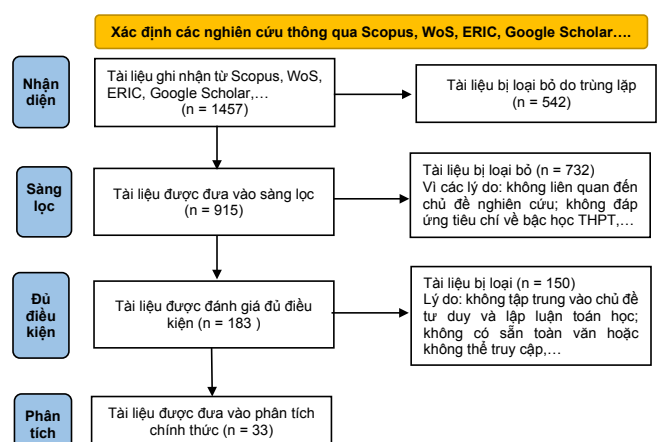
Nghiên cứu này được thực hiện dưới dạng tổng quan tài liệu có hệ thống mang tính tích hợp lí thuyết (PRISMA-informed systematic integrative review). Đây là sự kết hợp giữa quy trình sàng lọc theo PRISMA 2020 (Page và cộng sự, 2021) với kĩ thuật tổng hợp lí thuyết (Theoretical synthesis) nhằm hệ thống hóa nền tảng lí luận và nhận diện khoảng trống nghiên cứu (xem Hình 1).

Tài liệu được tìm kiếm và trích xuất từ các cơ sở dữ liệu chính: Scopus, Web of Science (WoS), ERIC và Google Scholar. Ngoài ra, tài liệu trong nước được ghi nhận từ cơ sở dữ liệu tạp chí khoa học, đặc biệt là cơ sở dữ liệu VJOL (Vietnam Journals Online). Ưu tiên các tài liệu công bố giai đoạn từ 2008 đến tháng 02 năm 2026. Đồng thời giữ lại các công trình kinh điển có giá trị nền tảng bất kể năm xuất bản, chẳng hạn như: van Hiele (1986), Toulmin (2003), Vygotsky (1978), Weinert (2001), Pólya (1945).

Trong quá trình tìm kiếm tài liệu, chuỗi các từ khóa được xây dựng theo nguyên tắc kết hợp ba cụm khái niệm: 1) Hình học, 2) Lập luận - chứng minh - tư duy, 3) Năng lực, thông qua toán tử Boolean AND và OR:

Scopus (trường TITLE-ABS-KEY): (TITLE-ABS-KEY (“Geometry education” OR “Geometric reasoning” OR “Geometric thinking” OR “Van Hiele” OR “Figure apprehension” OR “Semiotic representation”) AND TITLE-ABS-KEY (“Reasoning” OR “Proof” OR “Proving” OR “Argumentation” OR “Competenc*”)) AND PUBYEAR > 2007 AND (LIMIT-TO (LANGUAGE, “English”))

Web of Science (trường Topic - TS): TS = (((“Geometry education” OR “Geometric reasoning” OR “Van Hiele” OR “Figure apprehension”) AND (“Reasoning” OR “Proof” OR “Argumentation” OR “Competenc*”)) Timespan = 2008 - 2026



(Nguồn: Tác giả)

Hình 1: Sơ đồ quy trình PRISMA để lựa chọn tài liệu

ERIC/Google Scholar: kết hợp các từ khóa: geometry teaching, geometric reasoning, van Hiele levels, mathematical reasoning and proof, figure apprehension, mathematical competence.

Nguồn tiếng Việt: (“Năng lực tư duy và lập luận Toán học”) AND (“Hình học” OR “Dạy học Hình học” OR “Trung học phổ thông” OR “Chương trình Giáo dục phổ thông 2018”).

Chỉ đưa vào xem xét các tài liệu: 1) Có chủ đề giáo dục Toán học, tập trung vào Hình học, lập luận - chứng minh, hoặc khung năng lực Toán học; 2) Các công trình lý thuyết nền tảng (kinh điển); nghiên cứu thực nghiệm có bình duyệt; tổng quan hệ thống; văn bản chương trình/chính sách; 3) Ưu tiên các công trình công bố trong giai đoạn 2008 - 2026; giữ lại các tài liệu kinh điển mọi năm; 4) Xem xét tất cả các tài liệu bằng tiếng Việt và tiếng Anh; 5) Các tài liệu có thông tin thư mục đầy đủ và truy cập được qua DOI/URL. Quá trình sàng lọc đã lựa chọn được 33 tài liệu đáp ứng đầy đủ các điều kiện để đưa vào phân tích: Khung năng lực và năng lực Toán học (6 tài liệu); Lý thuyết về lập luận và chứng minh (11 tài liệu); Các mô hình tâm lý - nhận thức về tư duy hình học (10 tài liệu); Quan điểm kiến tạo xã hội (1 tài liệu); Tổng quan hệ thống cập nhật (4 tài liệu); Bối cảnh chính sách và triển khai (1).

Khai báo AI: Trong quá trình chuẩn bị cũng như hoàn thiện bài báo này, các tác giả đã sử dụng ChatGPT một cách có kiểm soát để: gợi ý thiết kế nghiên cứu, tìm kiếm tài liệu, hiệu đính cũng như cải thiện độ rõ ràng và văn phong cho các bản thảo ban đầu... Sau khi sử dụng, các tác giả đã rà soát, kiểm chứng và chuẩn hóa thông tin, nội dung.

3. Kết quả nghiên cứu

3.1. Tổng quan các kết quả nghiên cứu

a. Một số hướng nghiên cứu về giáo dục hình học, lập luận và chứng minh

Giáo dục hình học là một trong những lĩnh vực có truyền thống nghiên cứu lâu đời và liên tục. Các kĩ năng được quan tâm nghiên cứu nhiều nhất tập trung quanh bốn nhóm: lập luận và tranh luận (Arguing and reasoning), chứng minh và lập luận (Proving and reasoning), giải quyết vấn đề và mô hình hóa, đồng thời ghi nhận xu hướng ngày càng gia tăng các nghiên cứu về đánh giá, trò chơi hóa và tư duy tính toán trong hình học (Mas Hans-Georg Weigand và cộng sự, 2025).

Song song với mạch hình học, mạch nghiên cứu về lập luận và chứng minh (Reasoning and proof) cũng được phát triển mạnh. Kết quả nghiên cứu tổng quan 80 công trình công bố trong giai đoạn 2019 -

2024 cho thấy, phần lớn các nghiên cứu về lập luận và chứng minh tập trung vào nội dung hình học, các hoạt động nghiên cứu gia tăng rõ rệt trong giai đoạn này và trải rộng trên 29 quốc gia, trong đó Thổ Nhĩ Kỳ, Hoa Kỳ và Indonesia là ba quốc gia có nhiều công trình nhất (Lessing & Ogbonnaya, 2025).

Mạch nghiên cứu cổ điển về các mức độ tư duy hình học theo lý thuyết van Hiele vẫn được duy trì bền bỉ. Các kết quả nghiên cứu tổng quan hệ thống về tư duy hình học cho thấy lý thuyết van Hiele tiếp tục là khung tham chiếu chủ đạo để mô tả và đo lường sự phát triển tư duy hình học, đồng thời được kết hợp ngày càng nhiều với phần mềm hình học động và các chiến lược can thiệp theo pha học tập (Yalley và cộng sự, 2021). Các nghiên cứu thực nghiệm gần đây tiếp tục khẳng định mô hình giảng dạy theo van Hiele có hiệu quả nâng cao mức độ tư duy hình học của học sinh, đồng thời khuyến nghị giáo viên cần xác định mức độ tư duy của học sinh trước khi tổ chức dạy học để bố trí hoạt động phù hợp (Yalley và cộng sự, 2021).

Một hướng nghiên cứu có tính lý thuyết sâu hơn xuất phát từ mô hình nhận thức của Raymond Duval, vốn phân tích vi mô các quá trình tham gia vào hoạt động hình học và sự phối hợp giữa chúng. Công trình của Duval (2017) tái khẳng định luận điểm trung tâm rằng tư duy Toán học về bản chất dựa trên các phép biến đổi giữa các hệ thống biểu diễn kí hiệu (Registers of semiotic representation) và việc học toán đòi hỏi sự phối hợp giữa nhiều hệ biểu diễn. Trong Hình học, hướng nghiên cứu này được thao tác hóa thành các công cụ đánh giá khả năng linh hoạt hình vẽ của học sinh với bằng chứng cho thấy: việc phối hợp linh hoạt các kiểu linh hoạt có tác động đáng kể tới thành công của học sinh trong giải toán, chứng minh và sáng tạo hình học (Antunović & Manfreda Kolar, 2026).

Cuối cùng, mạch nghiên cứu về lập luận như một năng lực gắn với khung Lithner đã trở thành một trụ cột lý thuyết được trích dẫn rộng rãi nhất trong hai thập niên gần đây. Việc phân biệt giữa lập luận bắt chước (Imitative reasoning) và lập luận sáng tạo có cơ sở Toán học (Creative mathematically founded reasoning) đã cung cấp một bộ tiêu chí thao tác hóa để phân loại nhiệm vụ học tập và đánh giá chất lượng lập luận (Lithner, 2008, 2017).

Có thể nhận thấy, bốn mạch nghiên cứu nêu trên (giáo dục hình học, lập luận và chứng minh, các mức độ tư duy hình học, biểu diễn kí hiệu) không tách rời mà bổ sung cho nhau: mỗi mạch soi chiếu một phương diện của cùng một hiện tượng là sự phát triển tư duy và lập luận của học sinh trong môi trường hình học.

Một số hướng nghiên cứu trong nước về phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học

Ở Việt Nam, hướng nghiên cứu rèn luyện kỹ năng lập luận trong hình học không phải là vấn đề mới. Từ giữa thập niên 1990, công trình của Nguyễn Văn Lộc (1995) đã đặt vấn đề hình thành kỹ năng lập luận có căn cứ cho học sinh đầu cấp Trung học cơ sở thông qua dạy học hình học. Điều này cho thấy, mối quan tâm sớm tới mối liên hệ đặc thù giữa hình học và lập luận trong giáo dục Toán học Việt Nam. Tuy nhiên, phải đến khi Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 chính thức xác lập năng lực tư duy và lập luận Toán học thành một thành tố năng lực độc lập, hướng nghiên cứu này mới thực sự trở nên sôi động và có hệ thống.

Một tổng quan các nghiên cứu trong nước giai đoạn 2018 - 2024 cho thấy, năng lực tư duy và lập luận Toán học đã trở thành chủ đề được quan tâm rộng rãi, trải dài từ tiểu học đến trung học phổ thông trên cả ba mạch nội dung: Số và Đại số, Hình học, Thống kê và Xác suất (Nguyễn Thị Mỹ Hằng và cộng sự, 2025), theo đó có ba khuynh hướng nổi bật: Thứ nhất, là khuynh hướng đề xuất biện pháp sư phạm gắn với từng chủ đề cụ thể, chẳng hạn phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học qua dạy học chủ đề hình đồng dạng ở lớp 8 (Nguyễn Hữu Hậu và cộng sự, 2024) hay qua dạy học giải bài tập Đại số tổ hợp ở lớp 10 (Nguyễn Văn Khang & Lê Hoàng Mai, 2024; Nguyễn Văn Thuận và cộng sự, 2023). Thứ hai, là khuynh hướng khảo sát thực trạng, ghi nhận những hạn chế trong phương pháp dạy học hiện hành và khó khăn của giáo viên trong việc tổ chức và đánh giá hoạt động lập luận (Nguyễn Thị Thanh Tuyên, 2024). Thứ ba, là khuynh hướng đổi mới phương pháp tổ chức dạy học, tiêu biểu là dạy học bằng tranh luận khoa học nhằm tạo môi trường cho học sinh nêu phỏng đoán, phản biện và bảo vệ lập luận (Lê Thái Bảo Thiên Trung, 2017; Nguyễn Minh Thông và cộng sự, 2023).

Về phương diện khung lý luận cho dạy học phát triển năng lực môn Toán nói chung thu hút được sự quan tâm của khá đông đảo các tác giả: nhóm tác giả Đỗ Đức Thái và cộng sự (2017) đã đề xuất quan niệm về năng lực Toán học với các thành tố của nó, xác định yêu cầu cần đạt theo từng cấp học trong chương trình giáo dục phổ thông 2018. Đồng thời, phân tích và làm rõ quan niệm về năng lực tính toán trên bình diện một năng lực chuyên môn. Đặc biệt, tác giả Đỗ Đức Thái và cộng sự (2018) đã phân tích đóng góp của môn Toán đối với việc hình thành các phẩm chất và năng lực, đồng thời đề xuất quy trình dạy học phát triển năng lực gồm các bước trải

nh nghiệm, hình thành kiến thức, thực hành - luyện tập và vận dụng, qua đó cụ thể hóa định hướng của chương trình thành quy trình khả thi; ...Ngoài ra, khá nhiều các kết quả nghiên cứu của các nhóm tác giả khác về chủ đề này nhưng phần lớn còn dừng ở cấp tiểu học và trung học cơ sở, hoặc ở các mạch nội dung ngoài hình học (Nguyễn Chiến Thắng và cộng sự, 2022).

Khoảng trống nghiên cứu: Từ các kết quả tổng quan tài liệu nêu trên cho thấy có ba khoảng trống nghiên cứu chính:

Thứ nhất là khoảng trống về cấp học. Mặc dù năng lực tư duy và lập luận Toán học đã được nghiên cứu rộng rãi, tuy nhiên phần lớn các công trình trong nước tập trung ở tiểu học và trung học cơ sở; số lượng nghiên cứu chuyên sâu cho riêng cấp Trung học phổ thông, đặc biệt với mạch hình học không gian, phương pháp tọa độ và vectơ,... những chủ đề đòi hỏi lập luận suy diễn ở mức độ cao còn tương đối hạn chế.

Thứ hai là khoảng trống về tích hợp lý thuyết. Các nghiên cứu hiện có thường vận dụng riêng lẻ từng khung lý thuyết: hoặc van Hiele, hoặc Toulmin, hoặc Lithner... ít có công trình liên kết các khung này thành một hệ thống phân tích thống nhất, vừa mô tả được tiến trình nhận thức hình học, vừa phân tích được cấu trúc lập luận vừa nhận diện được các thao tác tư duy.

Thứ ba là khoảng trống về công cụ đánh giá. Mặc dù chương trình mô tả năng lực tư duy và lập luận Toán học qua ba nhóm biểu hiện, tuy nhiên việc thao tác hóa các biểu hiện này thành tiêu chí và đường phát triển năng lực (Learning progression) có thể đo lường được cho từng chủ đề hình học Trung học phổ thông vẫn còn là một nhiệm vụ chưa được quan tâm nghiên cứu một cách thỏa đáng. Trong mục 3.3 đề xuất khung phân tích tích hợp như một tiền đề lý luận góp phần giải quyết khoảng trống thứ ba, đồng thời gợi mở hướng giải quyết cho hai khoảng trống còn lại.

3.2. Cơ sở lý luận

Kết quả nghiên cứu cũng cho thấy, cơ sở lý luận của dạy học Hình học ở cấp Trung học phổ thông theo hướng phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học có thể được xây dựng trên cơ sở bốn trụ cột lý thuyết bổ sung lẫn nhau sau đây:

Trụ cột thứ nhất: Khung năng lực và năng lực Toán học.

Khái niệm “Năng lực” bắt nguồn từ định nghĩa của Weinert (2001), theo đó năng lực được hiểu là tổ hợp các khả năng và kỹ năng nhận thức sẵn có hoặc có

thể học được ở mỗi cá nhân, cùng với sự sẵn sàng về động cơ, ý chí và xã hội, cho phép cá nhân giải quyết thành công và có trách nhiệm các vấn đề trong những tình huống biến đổi. Định nghĩa này nhấn mạnh ba đặc trưng: năng lực gắn với bối cảnh, là sự huy động tổng hợp nhiều nguồn lực và bộc lộ qua hành động giải quyết vấn đề. Chương trình Giáo dục phổ thông tổng thể 2018 quan niệm về năng lực: là thuộc tính cá nhân được hình thành nhờ tố chất sẵn có và quá trình rèn luyện, cho phép huy động tổng hợp kiến thức, kĩ năng và các thuộc tính cá nhân để thực hiện thành công một hoạt động (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018b). Về bản chất, quan niệm này đồng nhất với quan niệm thông dụng trên thế giới (Weinert, 2001).

Đối với năng lực Toán học, khung lí thuyết nền tảng nhất được đề cập trong khuôn khổ dự án KOM của Đan Mạch, theo đó Niss (2003) định nghĩa: Năng lực Toán học là khả năng thấu hiểu, phán đoán, thực hiện và sử dụng Toán học trong nhiều bối cảnh nội toán và ngoại toán. Đồng thời, Niss (2003) xác định tám năng lực thành phần chia thành hai nhóm: Nhóm thứ nhất, đặt và trả lời câu hỏi trong và bằng Toán học (bao gồm tư duy Toán học, đặt và giải quyết vấn đề, mô hình hóa và lập luận Toán học); Nhóm thứ hai, xử lí ngôn ngữ và công cụ của Toán học. Kết quả nghiên cứu cập nhật của khung KOM tái khẳng định mỗi năng lực đều có hai mặt phân tích (thấu hiểu) và thực hiện, một đặc điểm có ý nghĩa trực tiếp đối với việc đánh giá lập luận, bởi học sinh không chỉ cần tạo ra lập luận mà còn cần thẩm định lập luận của người khác (Niss & Højgaard, 2019).

Trụ cột thứ hai: Lí thuyết về lập luận và chứng minh.

Nếu khung năng lực xác định vị trí của lập luận trong cấu trúc năng lực Toán học, thì các lí thuyết về lập luận làm rõ bản chất và cấu trúc của nó. Ở phương diện chất lượng lập luận, khung của Lithner (2008) phân biệt hai loại có ý nghĩa quyết định: Lập luận bất chước (bao gồm lập luận ghi nhớ và lập luận thuật toán), trong đó học sinh tái hiện hoặc áp dụng một quy trình đã biết mà không cần phản tỉnh; Lập luận sáng tạo có cơ sở Toán học, trong đó học sinh tự kiến tạo một phần chuỗi lập luận mới, thỏa mãn đồng thời ba tiêu chí: tính mới, tính hợp lí và nền tảng Toán học. Lithner (2017) phát triển khung này thành các nguyên tắc thiết kế nhiệm vụ chỉ ra rằng, việc chỉ cung cấp sẵn thuật toán để học sinh bắt chước có hậu quả tiêu cực lâu dài đối với hiểu biết khái niệm. Đối với Hình học ở cấp Trung học phổ thông, khung Lithner đặc biệt hữu ích vì nó cung cấp tiêu chí thao tác hóa để phân loại bài toán và đánh giá chất lượng lập luận: một bài toán hình học có nhiều cách giải hoặc yêu cầu dự đoán rồi chứng

minh sẽ tạo điều kiện cho lập luận sáng tạo, trong khi một bài tập áp dụng công thức theo mẫu chỉ kích hoạt lập luận thuật toán.

Ở phương diện cấu trúc của một lập luận, mô hình của Toulmin (2003) được sử dụng rộng rãi để phân tích và rèn luyện năng lực lập luận. Theo Toulmin, một lập luận đầy đủ gồm các thành phần: khẳng định (Claim), dữ liệu (Data), cơ sở suy luận (Warrant), nền tảng bảo chứng (Backing), mệnh đề bổ nghĩa (Qualifier) và điều kiện phản bác (Rebuttal). Mô hình này cho phép tường minh hóa “bộ khung” của một chứng minh hình học, giúp học sinh ý thức được rằng một kết luận hợp lệ phải được nối với dữ liệu thông qua một cơ sở suy luận có căn cứ. Đáng chú ý, các tổng quan gần đây cho thấy, mô hình Toulmin nằm ở trung tâm của nhiều quan niệm về lập luận như một quá trình, trong đó việc biện minh cho các khẳng định thông qua cơ sở suy luận và nền tảng bảo chứng là hạt nhân chung của cả khung Toulmin lẫn khung Lithner (Lessing & Ogbonnaya, 2025).

Ở phương diện sự phạm, Stylianides (2007) đưa ra một định nghĩa có ảnh hưởng về chứng minh trong bối cảnh lớp học: chứng minh là một luận chứng Toán học sử dụng các phát biểu được cộng đồng lớp học chấp nhận là đúng, vận dụng các hình thức lập luận hợp lệ và nằm trong phạm vi khả năng nhận thức của cộng đồng lớp học, được trình bày bằng các phương thức biểu đạt phù hợp. Quan niệm này mở rộng “chứng minh” từ chỗ là sản phẩm hình thức của nhà Toán học sang một hoạt động lập luận có thể tiếp cận được với học sinh phổ thông, tạo cầu nối quan trọng giữa lập luận không hình thức (quy nạp, trực giác) và chứng minh suy diễn hình thức. Đối với Hình học ở cấp Trung học phổ thông, định nghĩa của Stylianides có giá trị thực tiễn. Nó cho phép giáo viên đánh giá lập luận của học sinh theo chuẩn mực phù hợp với trình độ lớp học thay vì áp đặt ngay tiêu chuẩn chặt chẽ hình thức, qua đó giảm bớt rào cản tâm lí và tạo lộ trình phát triển dần.

Ba khung lí thuyết về lập luận nêu trên không loại trừ mà bổ sung cho nhau: khung Lithner trả lời câu hỏi “Lập luận có chất lượng là gì?”, mô hình Toulmin trả lời câu hỏi “Lập luận được cấu trúc như thế nào?” và quan niệm của Stylianides trả lời “Lập luận hợp lệ trong lớp học cần đạt chuẩn mực nào”. Sự kết hợp ba khung này cung cấp một nền tảng đầy đủ cho cả việc thiết kế nhiệm vụ lẫn việc đánh giá lập luận.

Trụ cột thứ ba: Các mô hình tâm lí - nhận thức về tư duy hình học.

Trụ cột thứ ba lí giải vì sao hình học vừa là môi trường thuận lợi nhất, vừa là nơi học sinh gặp nhiều

khó khăn nhất khi học lập luận. Ba mô hình kinh điển thường được sử dụng làm nền tảng phân tích (Jones, 1998).

Mô hình các mức độ tư duy hình học của van Hiele, mô tả sự phát triển tư duy hình học qua một chuỗi mức độ có thứ bậc: trực quan (nhận dạng hình theo tổng thể), phân tích (nhận biết các tính chất của hình), suy luận không hình thức (thiết lập quan hệ giữa các tính chất, định nghĩa hình), suy diễn hình thức (xây dựng chứng minh trong hệ tiên đề) và chặt chẽ (làm việc với nhiều hệ hình học) (van Hiele, 1986; Crowley, 1987). Hai luận điểm cốt lõi có ý nghĩa trực tiếp đối với dạy học trung học phổ thông: thứ nhất, học sinh phải đi qua các mức độ tuần tự, không thể bỏ qua mức trung gian; thứ hai, sự chuyển mức phụ thuộc vào dạy học và trải nghiệm chứ không phụ thuộc tuổi tác (van Hiele, 1999). Các nghiên cứu đầu thập niên 1980 kết luận rằng, mức độ van Hiele thấp khiến học sinh khó thành công với hình học định hướng chứng minh ở trung học, từ đó khuyến nghị chuẩn bị tư duy hình học vững chắc hơn ở các lớp dưới (Usiskin, 1982). Dạy học hình học ở trung học phổ thông nhằm phát triển lập luận suy diễn chỉ thành công khi được xây dựng trên nền tảng các mức độ trực quan - phân tích - suy luận không hình thức đã được củng cố. Đây cũng là lí do nhiều học sinh trung học phổ thông “không chứng minh được” không phải vì thiếu kiến thức mà vì chưa đạt mức độ tư duy hình học tương ứng, điều này tiếp tục được Yalley và cộng sự (2021) xác nhận trong các nghiên cứu thực nghiệm gần đây.

Mô hình nhận thức hình học của Duval, bổ sung cho mô hình van Hiele ở cấp độ vi mô, Duval (1998) phân tích ba quá trình nhận thức cơ bản trong hoạt động hình học (trực quan hóa, dựng hình và lập luận) và bốn kiểu lĩnh hội hình vẽ: lĩnh hội tri giác (nhận diện trực quan tức thời), lĩnh hội tuần tự (nắm trình tự dựng hình), lĩnh hội diễn ngôn (lập luận dựa trên ngôn ngữ và tính chất đã phát biểu) và lĩnh hội thao tác (biến đổi, phân tách, tái cấu trúc hình để khám phá cấu trúc mới). Theo Duval, khó khăn cốt lõi của học sinh nằm ở chỗ không phối hợp được giữa trực quan hóa và lập luận: thường có khoảng cách giữa “Điều hình vẽ cho thấy” và “Điều hình vẽ biểu diễn”. Duval (2017) khái quát rằng, năng lực Toán học về bản chất là năng lực phối hợp và biến đổi giữa các hệ biểu diễn; áp dụng vào hình học, điều này có nghĩa học sinh cần học cách chuyển hóa giữa hình vẽ, ngôn ngữ tự nhiên và kí hiệu hình thức. Các nghiên cứu thao tác hóa khung Duval cho thấy việc rèn luyện khả năng phối hợp các kiểu lĩnh hội, đặc biệt là lĩnh hội thao tác có tác động tích cực tới năng lực giải toán và chứng minh của học sinh (Antunović & Manfreda Kolar, 2026). Hệ quả sự phạm cho Hình

học trung học phổ thông: giáo viên cần thiết kế hoạt động giúp học sinh chuyển từ *nhìn hình* sang *thao tác* trên hình và *lập luận* về hình, lấy việc chia tách, ghép và biến đổi hình làm điểm khởi đầu cho việc phát hiện đường lối chứng minh.

Lí thuyết khái niệm hình tượng của Fischbein. Theo Fischbein (1993), các đối tượng hình học có bản chất “kép”: vừa mang tính khái niệm (chịu sự kiểm soát của định nghĩa, tiên đề, định lí) vừa mang tính hình tượng (có hình dạng không gian cụ thể, gọi tri giác). Tư duy hình học thành thực đòi hỏi sự hòa hợp giữa hai mặt này. Khi mặt hình tượng lấn át mặt khái niệm, học sinh dễ mắc sai lầm do suy luận theo hình vẽ trực quan thay vì theo tính chất logic. Lí thuyết này lí giải nhiều “bẫy trực quan” phổ biến trong Hình học trung học phổ thông, chẳng hạn ngộ nhận một tính chất chỉ vì hình vẽ “trông có vẻ” như vậy, đồng thời nhấn mạnh vai trò của việc rèn cho học sinh ý thức kiểm soát hình vẽ bằng lập luận có căn cứ. Ba mô hình van Hiele, Duval và Fischbein soi chiếu cùng một hiện tượng từ ba góc độ: van Hiele mô tả quỹ đạo phát triển dài hạn, Duval phân tích cấu trúc vi mô của một thao tác nhận thức, còn Fischbein làm rõ bản chất kép của đối tượng hình học tạo nên khoảng cách giữa trực giác và logic.

Trụ cột thứ tư: Quan điểm kiến tạo xã hội và môi trường học tập.

Các trụ cột sẽ không hoàn chỉnh nếu thiếu yếu tố về *môi trường học tập*. Quan điểm kiến tạo xã hội với khái niệm vùng phát triển gần của Vygotsky (1978), cung cấp cơ sở cho việc tổ chức dạy học có hỗ trợ (Scaffolding). Trong đó, tương tác, tranh luận và sự trợ giúp của giáo viên, bạn học giúp học sinh thực hiện được những lập luận mà chưa thể tự làm độc lập. Lập luận, về bản chất là một hoạt động mang tính xã hội và diễn ngôn: học sinh học cách lập luận thông qua việc nêu phỏng đoán, bảo vệ quan điểm và phản biện lẫn nhau. Quan điểm này hậu thuẫn cho các hình thức dạy học hợp tác và tranh luận khoa học, một hướng đã được triển khai trong bối cảnh hiện nay của Việt Nam như một phương thức tạo môi trường cho học sinh bộc lộ và phát triển lập luận (Lê Thái Bảo Thiên Trung, 2017). Khi so sánh với quan niệm của Stylianides (2007) về chứng minh như một sản phẩm được “cộng đồng lớp học chấp nhận”, có thể thấy hai khung này hội tụ ở một điểm: lập luận Toán học phát triển tốt nhất trong một cộng đồng diễn ngôn, nơi các chuẩn mực về tính hợp lệ được thương lượng và chia sẻ.

3.3. Đề xuất khung tích hợp

Từ bốn trụ cột về cơ sở lí luận đã trình bày trên, chúng ta có thể tích hợp thành một khung tích hợp

gồm ba yếu tố cho dạy học hình học trung học phổ thông theo hướng phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học: *Thứ nhất, thao tác tư duy*: bám sát ba nhóm biểu hiện của chương trình và hệ thống các thao tác so sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hóa, khái quát hóa, tương tự hóa, quy nạp và diễn dịch (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018a). *Thứ hai, cấu trúc và chất lượng lập luận*: kết hợp mô hình Toulmin (để phân tích cấu trúc, khẳng định dữ liệu, cơ sở suy luận, bảo chứng) với khung Lithner (để đánh giá chất lượng lập luận theo trục bất chước - sáng tạo) và chuẩn mực lớp học của Stylianides. *Thứ ba, tiến trình nhận thức hình học*: sử dụng mức độ van Hiele làm trục dọc phát triển dài hạn, các kiểu lĩnh hội của Duval làm công cụ phân tích từng hoạt động và lý thuyết Fischbein để chẩn đoán các sai lầm do khoảng cách giữa trực giác và logic.

Ba yếu tố này gắn kết với nhau qua một logic sư phạm thống nhất, để phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học qua hình học: giáo viên thiết kế nhiệm vụ kích hoạt thao tác tư duy (yếu tố thứ nhất), tổ chức cho nhiệm vụ được thực hiện theo tiến trình từ trực quan hóa đến thao tác trên hình rồi đến lập luận phù hợp với tiến trình nhận thức của học sinh (yếu tố thứ ba) và hướng dẫn học sinh tường minh hóa cấu trúc lập luận đồng thời nâng dần chất lượng từ bất chước lên sáng tạo (yếu tố thứ hai). Tất cả diễn

ra trong một môi trường tranh luận và hợp tác tận dụng vùng phát triển gần.

4. Kết luận

Trên cơ sở phân tích 33 tài liệu, là các kết quả nghiên cứu trong và ngoài nước được chọn lọc theo quy trình PRISMA, bài viết giới thiệu kết quả tổng quan có hệ thống, đồng thời tổng hợp cơ sở lý luận của dạy học hình học trung học phổ thông theo hướng phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học. Ba kết quả chính được rút ra: *Thứ nhất*, cơ sở lý luận của hướng nghiên cứu này có thể được tổ chức quanh bốn trụ cột bổ sung lẫn nhau: khung năng lực (Weinert, 2001; Niss, 2003), lý thuyết lập luận - chứng minh (Lithner, 2017; Toulmin, 2003; Stylianides, 2007), các mô hình nhận thức hình học (van Hiele, 1999; Duval, 2017; Fischbein, 1993) và quan điểm kiến tạo xã hội (Vygotsky, 1978). *Thứ hai*, bốn trụ cột này có thể được tích hợp thành một khung phân tích ba yếu tố: *thao tác tư duy, cấu trúc và chất lượng lập luận, tiến trình nhận thức hình học*. Khung phân tích này vừa có giá trị mô tả, vừa có giá trị chẩn đoán và thiết kế. *Thứ ba*, bức tranh nghiên cứu hiện có còn ba khoảng trống: về cấp học, về tích hợp lý thuyết và về công cụ đánh giá. Bài viết đã đề xuất giải quyết khoảng trống tích hợp lý thuyết và gợi mở hướng cho hai khoảng trống còn lại.

Tài liệu tham khảo

- Antunović, B. & Manfreda Kolar, V. (2026). Operationalising Duval's geometrical figure apprehension: Teacher professional development and assessment of students' geometric reasoning. *European Journal of Educational Research*, 15(3), pp.871-890. https://www.eu-jer.com/articles/EU-JER_15_3_871.pdf
- Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018a). *Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán* (Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26 tháng 12 năm 2018). Hà Nội.
- Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018b). *Chương trình Giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể* (Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26 tháng 12 năm 2018). Hà Nội.
- Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. M. Lindquist (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12* (1987 Yearbook, pp. 1-16). National Council of Teachers of Mathematics. <https://www.cns-eoc.colostate.edu/docs/math/mathactivities/june2007/The%20van%20Hiele%20Model%20of%20the%20Development%20of%20Geometric%20Thought.pdf>
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study*, pp. 37-52. Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-5226-6>
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9>
- Duong, B.-H., Dao, V. & DeJaeghere, J. (2022). *Complexities in teaching competencies: A longitudinal analysis of Vietnamese teachers' sensemaking and practices* (RISE Working Paper Series No. 22/119). Research on Improving Systems of Education (RISE). https://doi.org/10.35489/BSG-RISEWP_2022/119
- Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt và các thành viên Ban phát triển Chương trình môn Toán. (2017). Xác định năng lực Toán học trong Chương trình Giáo dục phổ thông mới. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, số 146, tháng 11 năm 2017.
- Đỗ Đức Thái (Chủ biên), Đỗ Tiến Đạt, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Phạm Sĩ Nam, Vũ Đình Phụng, Nguyễn Thị Kim Sơn, Vũ Phương Thúy & Trần Quang Vinh. (2020). *Dạy học phát triển năng lực môn Toán Tiểu học*. NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.

- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), pp.139–162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>
- Hans-Georg Weigand, Karen Hollebrands & Michela Maschietto (2025). Geometry education at secondary level - A systematic literature review. *ZDM - Mathematics Education*, 57(4), pp.829–843. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01703-1>
- Jones, K. (1998). Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1–2), 29–34. https://eprints.soton.ac.uk/41308/1/Jones_BSRLM_18_1998.pdf
- Lê Thái Bảo Thiên Trung. (2017). Dạy học Toán bằng tranh luận khoa học. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, 14(1), tr.29-39.
- Lessing, M.-J. & Ogonnaya, U. I. (2025). Reasoning and proof in mathematics education: A systematic literature review. *Discover Education*, 4, Article 184. <https://doi.org/10.1007/s44217-025-01016-1>
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), pp.255–276. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
- Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM - Mathematics Education*, 49(6), pp.937–949. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0867-3>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM. https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf
- Nguyễn Hữu Hậu, Lê Phương Chi & Nguyễn Thành Tâm. (2024). Phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học cho học sinh lớp 8 khi dạy học chủ đề hình đồng dạng. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Hồng Đức*, 68, tr.56-65. <https://hdujs.edu.vn/index.php/hdujs/article/view/529>
- Nguyễn Văn Khang & Lê Hoàng Mai. (2024). Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề Đại số tổ hợp – Toán 10. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Đồng Tháp*, 13(01S), tr.203-215. <https://dthujs.vn/index.php/dthujs/article/view/1752>
- Nguyễn Văn Lộc. (1995). *Hình thành kỹ năng lập luận có căn cứ cho học sinh lớp đầu cấp phổ thông cơ sở Việt Nam thông qua dạy học hình học*. Luận án Tiến sĩ Giáo dục học. Trường Đại học Vinh.
- Nguyễn Văn Thuận, Nguyễn Thị Mỹ Hằng & Nguyễn Thị Xoan. (2023). Phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học cho học sinh trong dạy học chủ đề “Đại số tổ hợp” ở trung học phổ thông. *Tạp chí Giáo dục*, 23(7), tr.1-5.
- Nguyễn Thị Mỹ Hằng, Nguyễn Thị Xoan & Lê Thị Thảo. (2025). Một số nghiên cứu về năng lực tư duy và lập luận Toán học của học sinh phổ thông tại Việt Nam giai đoạn 2018-2024. *Tạp chí Giáo dục*, 25(7), tr.1-5.
- Nguyễn Thông Minh & Nguyễn Thị Thúy An (2023). Tổ chức dạy học môn Toán ở trung học phổ thông theo định hướng phát triển năng lực học sinh. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, tập 19, số 07.
- Nguyễn Chiến Thắng, Đỗ Văn Chung (2022). Bồi dưỡng năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán cho học sinh thông qua dạy học nội dung Hình học lớp 6. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, tập 18, số 04.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*. pp. 116-124. Hellenic Mathematical Society. <https://forskning.ruc.dk/en/publications/mathematical-competencies-and-the-learning-of-mathematics-the-dan>
- Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), pp.9–28. <http://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Nguyễn Thị Thanh Tuyên (2024). Thực trạng phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học cho học sinh trong dạy học môn Toán ở một số trường trung học cơ sở. *Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Trường Đại học Hùng Vương*, 35(2), tr.48–56. <https://doi.org/10.59775/1859-3968.200>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321. <https://doi.org/10.2307/30034869>
- Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (Updated ed.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005> (Xuất bản lần đầu năm 1958).
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry (Final Report)*. Chicago, IL: Department of Education, University of Chicago.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.
- van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), pp.310-316. <https://doi.org/10.5951/TCM.5.6.0310>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. In D. S. Rychen & L. H. Salganik (Eds.), *Defining and selecting key competencies*. pp.45-65. Hogrefe & Huber. https://pure.mpg.de/pubman/faces/ViewItemFullPage.jsp?itemId=item_720863
- Yalley, E., Armah, G. & Ansah, R. K. (2021). Effect of the Van Hiele instructional model on students' achievement in geometry. *Education Research International*, 2021, Article 6993668. <https://doi.org/10.1155/2021/6993668>