

PRACTISING GRADE 12 STUDENTS' SKILLS IN SOLVING CONDITIONAL PROBABILITY PROBLEMS

Cao Thi Ha

Email: caoha@vnu.edu.vn

VNU University of Education,
Vietnam National University Hanoi
144 Xuan Thuy street, Cau Giay ward,
Hanoi, Vietnam

Received: 03/4/2026

Revised: 08/5/2026

Accepted: 15/6/2026

Published: 20/7/2026

Abstract: Conditional probability is one of the new knowledge topics introduced in the 2018 General Education Mathematics Curriculum. It has numerous important applications across various real-world domains, including medicine, economics, and weather forecasting... Although this topic introduces only a limited number of new concepts, theorems, or formulas, each problem typically simulates a real or near-authentic situation. This requires learners not only to comprehend the underlying concepts but also to apply formulas accurately to derive correct solutions. Therefore, practicing mathematical skills for this topic is essential for students. This article uses a theoretical research method to analyze and synthesize the existing literature on the skills of solving mathematical problems and their development. It further examines the structure of content on conditional probability to propose a systematic framework for solving mathematical problems, along with a process for 12th-grade students to solve conditional probability problems.

Keywords: Skills, mathematical skills, conditional probability, Bayes formula, grade 12 students.

RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN CHỦ ĐỀ XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN CHO HỌC SINH LỚP 12

Cao Thị Hà

Email: caoha@vnu.edu.vn

Trường Đại học Giáo dục - Đại học Quốc gia Hà Nội
144 Xuân Thủy, phường Cầu Giấy,
Hà Nội, Việt Nam

Nhận bài: 03/4/2026

Chỉnh sửa xong: 08/5/2026

Chấp nhận đăng: 15/6/2026

Xuất bản: 20/7/2026

Tóm tắt: Xác suất có điều kiện là một trong các chủ đề kiến thức mới trong Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018 nhưng lại có ứng dụng quan trọng trong nhiều lĩnh vực của cuộc sống như Y học, Kinh tế, Dự báo thời tiết... Mặc dù chủ đề này không có quá nhiều khái niệm, định lý hay công thức mới nhưng mỗi bài toán trong chủ đề này đều mô phỏng một tình huống thực tiễn hoặc rất gần với thực tiễn cuộc sống mà khi giải nó đòi hỏi người học phải hiểu và vận dụng đúng được các công thức để đưa ra được lời giải chính xác. Do vậy, việc rèn luyện kĩ năng giải toán chủ đề này cho học sinh là rất quan trọng. Bài viết sử dụng phương pháp nghiên cứu lí luận để phân tích và tổng hợp các nghiên cứu về kĩ năng giải toán và rèn luyện kĩ năng giải toán, phân tích nội dung của chủ đề Xác suất có điều kiện từ đó đề xuất hệ thống kĩ năng giải toán cũng như quy trình giải toán chủ đề này để thông qua đó rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh lớp 12 trường trung học phổ thông. Kết quả nghiên cứu đã xác định 5 kĩ năng cốt lõi và đề xuất 3 quy trình giải tương ứng với bài toán xác suất có điều kiện, xác suất toàn phần và công thức Bayes. Mặc dù nghiên cứu này mới dừng ở nghiên cứu lí thuyết, tuy nhiên những kết quả này có thể được sử dụng như một cơ sở để giáo viên tổ chức rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh trong dạy học chủ đề này.

Từ khóa: Kĩ năng, kĩ năng giải toán, xác suất có điều kiện, công thức Bayes, học sinh lớp 12.

1. Đặt vấn đề

Bài tập toán có vai trò giá mang hoạt động của học sinh (Nguyễn Bá Kim, 2011). Thông qua hoạt động giải bài tập, học sinh phải thực hiện các hoạt

động nhất định bao gồm cả việc nhận dạng và thể hiện những định nghĩa, định lý, quy tắc hay phương pháp, những hoạt động toán học phức hợp. Việc giải bài tập toán một mặt giúp học sinh củng cố kiến

thức, mặt khác giúp học sinh có thể vận dụng thành thạo kiến thức này vào trong các lĩnh vực khác nhau của cuộc sống. Do vậy, giải toán là một trong những hoạt động thiết yếu của học sinh trong quá trình học tập môn Toán (Özreçberoğlu & Çağanağa, 2018). Việc giải toán đòi hỏi học sinh có khả năng đọc hiểu các giả thiết cũng như yêu cầu của bài toán, liên kết các giả thiết của bài toán với các kiến thức và kinh nghiệm đã có của bản thân để tìm ra giải pháp để giải quyết bài toán (Belgin Bal İncebacak & Esen Ersoy, 2016; Osman và cộng sự, 2018). Hoạt động này đòi hỏi người học phải có những kỹ năng thông thường như đọc hiểu, phân tích, tổng hợp vấn đề. Ngoài ra, với mỗi dạng bài tập toán có thể đòi hỏi người học phải có thêm những kỹ năng đặc thù cho phù hợp. Vì vậy, việc xác định được những kỹ năng mà học sinh cần có trong giải toán tương ứng với từng dạng toán là vấn đề có ý nghĩa.

Xác suất và Thống kê là mạch kiến thức có mối liên hệ chặt chẽ với thực tiễn (Lê Thị Hoài Châu, 2012; Quách Thị Sen, 2021), đặc biệt, trong bối cảnh hiện nay, nhu cầu hiểu biết, sử dụng các công cụ ngẫu nhiên trong phân tích và xử lý thông tin ngày càng rất cần thiết (Cox & Efron, 2017). Trong Chương trình Giáo dục phổ thông 2018, mạch Thống kê và Xác suất là một trong những mạch kiến thức có nhiều đổi mới nhất. Nguyễn Ái Quốc (2022) khẳng định rằng, việc xuất hiện khái niệm Xác suất có điều kiện ở lớp 12 trở thành một trong những điểm mới quan trọng trong Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018. Tuy nhiên, do đặc thù của chủ đề kiến thức này mặc dù không có nhiều khái niệm, định lý hay công thức nhưng tính ứng dụng của các kiến thức này vào thực tiễn lại rất đa dạng. Do vậy, bên cạnh việc dạy học các khái niệm, các công thức để giúp học sinh việc rèn cho học sinh kỹ năng giải toán chủ đề “Xác suất có điều kiện” là quan trọng.

Từ khi chủ đề Xác suất có điều kiện được đưa vào chương trình môn Toán năm 2018, đã có một số tác giả trong nước quan tâm nghiên cứu việc dạy học chủ đề này như Nguyễn Ái Quốc (2022); Bùi Anh Kiệt, Trần Hiếu Phát (2024); Cao Thị Hà và các cộng sự (2024); Võ Xuân Mai, Lê Ngọc Oanh (2025); Nguyễn Thị Duyên và các cộng sự (2025). Các nghiên cứu có thể được chia thành ba hướng nghiên cứu chính như sau: Hướng thứ nhất vận dụng một số lý thuyết và phương pháp dạy học hiện đại vào dạy học chủ đề Xác suất có điều kiện cho học sinh lớp 12 và sinh viên đại học. Theo hướng nghiên cứu này, có thể kể đến nghiên cứu của tác giả Quách Thị Sen (2021). Trong nghiên cứu này, tác giả đã đề xuất

quy trình 5 bước để vận dụng phương pháp dạy học khám phá vào dạy học Xác suất và Thống kê, trong đó có những tình huống liên quan đến xác suất có điều kiện nhằm nâng cao hiệu quả dạy học những nội dung này cho sinh viên. Nghiên cứu của Bùi Anh Kiệt và Trần Hiếu Phát (2024), dựa trên tổng hợp một số vấn đề lý luận về lý thuyết kiến tạo xã hội và phân tích đặc điểm của chủ đề Xác suất có điều kiện, các tác giả đã đề xuất mô hình 5 bước để dạy học giải bài tập Xác suất có điều kiện dựa trên lý thuyết này. Hướng thứ hai tập trung vào nghiên cứu một số khó khăn, sai lầm của người học khi học chủ đề Xác suất có điều kiện. Theo hướng này có thể kể đến nghiên cứu của Tarr & Lannin (2005). Theo đó, tác giả cho rằng, khi giải bài tập của chủ đề này, nhiều học sinh thường không nhận ra rằng không gian mẫu đã thay đổi trong tình huống không hoàn trả. Người học có xu hướng vận dụng sai các công thức trong khi tính xác suất (Tarr, 2002). Nguyễn Thị Duyên và các cộng sự (2025) cho rằng, học sinh mắc khá nhiều hiểu lầm khái niệm khi giải các bài toán xác suất có điều kiện có bối cảnh thực tế, trong đó phổ biến nhất là các hiểu nhầm liên quan đến việc bỏ qua biến cố điều kiện, trình tự thời gian xảy ra các biến cố và tính độc lập của các biến cố. Hướng thứ ba tập trung vào nghiên cứu dạy học chủ đề Xác suất có điều kiện nhằm phát triển năng lực toán học cho học sinh. Một trong các nghiên cứu khá tiêu biểu cho hướng này có thể kể đến nghiên cứu của Nguyễn Ái Quốc (2022), tác giả đã thực nghiệm một số tình huống dạy học chủ đề Xác suất có điều kiện cho 84 học sinh lớp 11 Trường Trung học phổ thông Long Thới. Kết quả thực nghiệm cho thấy, các tình huống dạy học này đã giúp tiếp cận được những kiến thức mới, đạt yêu cầu về kiến thức và kỹ năng theo Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018. Nghiên cứu của Cao Thị Hà và cộng sự (2024) đã mô tả những biểu hiện của năng lực tư duy và lập luận toán học của học sinh qua học tập chủ đề xác suất có điều kiện và đề xuất ba biện pháp sư phạm để phát triển năng lực tư duy này cho học sinh khi học tập chủ đề. Nghiên cứu của Võ Xuân Mai và Lê Ngọc Oanh (2025) đã đề xuất ba biện pháp sư phạm để phát triển năng lực mô hình hóa cho học sinh khi dạy học chủ đề Xác suất có điều kiện. Nghiên cứu của Phạm Huyền Trang và các cộng sự (2025) đề xuất các biện pháp để phát triển năng lực giao tiếp toán học cho học sinh khi học tập chủ đề Xác suất có điều kiện.

Tuy nhiên, các nghiên cứu trên chủ yếu tập trung vào vận dụng các lý thuyết hoặc phương pháp dạy học vào dạy học các nội dung lý thuyết (các định

nghĩa, công thức) thuộc chủ đề này hoặc đề xuất các biện pháp để dạy học chủ đề này theo hướng phát triển tư duy, năng lực toán học cho học sinh mà chưa tập trung hệ thống hóa kỹ năng giải toán và quy trình giải trong chủ đề này. Các câu hỏi được đặt ra là: 1/ Những kỹ năng cốt lõi nào mà học sinh cần có trong giải toán chủ đề Xác suất có điều kiện? 2/ Có thể xây dựng quy trình giải như thế nào cho các dạng toán cơ bản của chủ đề này nhằm hỗ trợ rèn luyện các kỹ năng đó?

2. Phương pháp nghiên cứu

Để trả lời cho các câu hỏi nghiên cứu trên, trong bài viết này, chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lý luận để phân tích các tài liệu liên quan đến kỹ năng giải toán, tài liệu về dạy học xác suất có điều kiện, Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018, sách giáo khoa Toán 12 hiện hành.

Trước hết, phương pháp này được sử dụng để phân tích, tổng hợp các nghiên cứu về kỹ năng giải toán, tiếp theo phân tích nội dung chủ đề Xác suất có điều kiện trong Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018, đối chiếu giữa nội dung và yêu cầu về kiến thức và kỹ năng cần hình thành cho học sinh trong học tập chủ đề để từ đó đề xuất những kỹ năng cốt lõi mà học sinh cần có để giải các bài toán chủ đề. Nội dung của chủ đề Xác suất có điều kiện trong sách giáo khoa Toán 12 hiện hành cũng được phân tích để tìm hiểu đặc trưng của các dạng toán trong chủ đề, từ đó đề xuất quy trình giải theo từng dạng toán.

3. Kết quả nghiên cứu

3.1. Kỹ năng giải bài toán chủ đề Xác suất có điều kiện

Kỹ năng giải toán và rèn luyện kỹ năng giải toán là vấn đề có sự phát triển lâu dài trong giáo dục toán học và đã gắn với tên tuổi của nhà giáo dục toán học nổi tiếng J.Polya, việc rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh là một trong nhiệm vụ quan trọng của giáo viên (Đỗ Thị Trinh, 2017). Vì vậy, vấn đề này vẫn đang thu hút nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các tác giả. Theo các tác giả Nguyễn Thị Xuân Mai, Nguyễn Dương Hoàng (2017), năng lực giải toán là một phần của năng lực toán học, là tổ hợp các kỹ năng đảm bảo thực hiện các hoạt động giải toán một cách có hiệu quả cao. Các tác giả này cũng cho rằng, năng lực giải toán thể hiện ở:

- Khả năng lĩnh hội nhanh chóng quy trình giải một bài toán và các yêu cầu của một lời giải đẹp và rõ ràng.

- Khả năng lập luận chính xác, về quan hệ giữa các dữ kiện của bài toán.

- Khả năng chuyển đổi từ điều kiện của bài toán sang ngôn ngữ: kí hiệu, quan hệ, phép toán giữa các đại lượng đã biết, chưa biết và ngược lại.

- Có tính độc lập và độc đáo cao trong khi giải toán và sự phát triển của năng lực giải quyết vấn đề.

- Có tính tích cực, kiên trì về mặt ý chí và khả năng huy động trí óc cao trong giải toán.

- Khả năng tìm tòi nhiều lời giải, huy động nhiều kiến thức một lúc vào việc giải bài tập, từ đó lựa chọn lời giải tối ưu.

- Có khả năng kiểm tra các kết quả đã đạt được và hình thành một số kiến thức mới thông qua hoạt động giải toán, tránh được những nhầm lẫn trong quá trình giải toán.

- Có khả năng nêu ra được một số bài tập tương tự cùng với cách giải.

- Có khả năng khái quát hóa từ bài toán cụ thể đến bài toán tổng quát.

Theo Nguyễn Thị Duyên và các cộng sự (2025), Xác suất có điều kiện gắn với cách các cá nhân đối phó với sự không chắc chắn và cách họ sử dụng thông tin bổ sung để ước lượng cơ hội xảy ra của các biến cố nhằm điều chỉnh lại xác suất theo dự đoán ban đầu; giúp mỗi cá nhân hiểu được những rủi ro có thể xảy ra và đưa ra quyết định phù hợp với cuộc sống và nghề nghiệp. Do vậy, đặc trưng của các bài toán trong chủ đề này là diễn tả bối cảnh thực tiễn hoặc bối cảnh mô phỏng thực tiễn, nên các bài toán hầu hết đều được diễn đạt bằng ngôn ngữ tự nhiên và nhiều bài toán được diễn đạt khá dài. Để giải quyết được bài toán này đòi hỏi người học phải có *khả năng đọc hiểu, biết chuyển các ngôn ngữ tự nhiên sang ngôn ngữ toán học, biết biểu diễn các mối quan hệ được diễn đạt bằng ngôn ngữ tự nhiên sang các biểu thức toán học tương ứng*. Từ các dữ kiện được mô tả trong bài toán, học sinh xác định yếu tố cần tính để lựa chọn được các công thức phù hợp. Từ kết quả nghiên cứu của Nguyễn Thị Xuân Mai và Nguyễn Dương Hoàng (2017), trong nghiên cứu này chúng tôi cho rằng, *các kỹ năng giải toán sau đây có thể rèn luyện cho học sinh thông qua dạy học chủ đề Xác suất có điều kiện*:

- (KN1) Kỹ năng đặt các biến cố, chuyển đổi ngôn ngữ tự nhiên sang ngôn ngữ kí hiệu toán học.

- (KN2) Kỹ năng lập luận chính xác để tìm mối quan hệ giữa các dữ kiện của bài toán, biểu đạt chúng thông qua các biến cố và xác định được xác

suất đã cho của các biến cố và xác suất cần tìm của biến cố.

- (KN3) Kỹ năng vận dụng đúng các công thức và tính toán chính xác.

- (KN4) Kỹ năng kiểm tra các kết quả đã đạt được và diễn giải ý nghĩa của chúng bằng ngôn ngữ tự nhiên.

- (KN5) Kỹ năng đề được một số bài tập tương tự cùng với cách giải.

3.2. Quy trình giải các bài toán thuộc chủ đề Xác suất có điều kiện

Trong chủ đề Xác suất có điều kiện có ba dạng bài toán cơ bản gắn với ba nội dung kiến thức chính của chủ đề, đó là: Bài toán tính xác suất có điều kiện, bài toán tính xác suất toàn phần và bài toán tính xác suất theo công thức Bayes. Trong chủ đề “Xác suất có điều kiện” ở trường trung học phổ thông, bài toán yêu cầu sử dụng công thức xác suất có điều kiện là khá đơn giản vì nó thường được diễn đạt theo cấu trúc, “tính xác suất để... khi ...” nên học sinh dễ dàng nhận dạng được bài toán. Bài toán liên quan đến công thức xác suất toàn phần yêu cầu tính xác suất của một biến cố qua việc chia không gian mẫu thành các tập con không giao nhau, mỗi tập con tương ứng với một biến cố đơn lẻ, xác suất của biến cố này được biểu diễn qua tổng xác suất của nó xảy ra dưới từng điều kiện riêng biệt. Bài toán liên quan đến sử dụng công thức Bayes, về bản chất là bài toán tính xác suất có điều kiện, bài toán này thường cho trước xác suất của biến cố A (thường gọi là xác suất tiên nghiệm), sau đó lại biết thêm thông tin về biến cố B đã xảy ra, nên người ta cần tính lại xác suất của biến cố A biết rằng, biến cố B đã xảy ra (xác suất hậu nghiệm), từ đó giúp cập nhật xác suất tiên nghiệm. Do vậy, trong mục này, chúng tôi sẽ đề xuất quy trình giải cho ba dạng toán này.

3.2.1. Quy trình giải bài toán về xác suất có điều kiện

Bài toán tính xác suất có điều kiện là dạng toán khá đơn giản so với hai bài toán còn lại nhưng lại là bài toán nền tảng cho những bài toán còn lại. Hai sai lầm phổ biến là nhầm lẫn $P(A|B)$ với $P(B|A)$, không phân biệt được sự khác nhau giữa xác suất có điều kiện $P(A|B)$ và xác suất thông thường $P(A)$. Nhiều học sinh xem các biến cố $A|B$, $B|A$, A như cùng một loại biến cố và cố gắng xử lý chúng bằng những kỹ thuật tương tự nhau (Ancker, 2006; Nguyễn Ái Quốc, 2017). Tarr & Lannin (2005) cho rằng, để giảm những sai lầm của học sinh trong giải toán xác suất có điều kiện, các phương pháp giảng dạy hiệu quả

cần thu hút sự chú ý đến tất cả các đặc điểm cho phép phân biệt các biến cố là khác nhau. Cụm từ “A cho trước B” có thể không đủ để thu hút sự chú ý đến sự tồn tại của một loại biến cố mới, có lẽ bởi vì cụm từ này hiếm khi được sử dụng bên ngoài thống kê. Các tác giả cho rằng, việc mô tả các biến cố có điều kiện là dưới dạng “A trong B” hoặc “B trong A” có thể giúp học sinh hình dung rõ hơn biến cố này như một tập con của một biến cố khác và nhấn mạnh sự tồn tại của một loại biến cố mới. Từ những cơ sở trên, nghiên cứu đề xuất quy trình để giải bài toán xác suất có điều kiện như sau:

Bước 1. Xác định các biến cố: Xác định rõ biến cố A và biến cố B trong bài toán. Xác định xem bài toán yêu cầu tính xác suất của biến cố A trong điều kiện biến cố B xảy ra hay ngược lại? Đây là bước quan trọng và thường cần sự phân tích kỹ lưỡng của bài toán. Bước này giúp học sinh rèn luyện kỹ năng (KN1).

Bước 2. Xác định $P(B)$: Tức là tính xác suất của biến cố B (điều kiện) xảy ra nếu bài toán yêu cầu tính xác suất của biến cố A trong điều kiện biến cố B xảy ra, ngược lại nếu yêu cầu tính thì ta cần tính $P(A)$. Để tính $P(B)$, ta cần xác định $n(\Omega)$ (trong đó Ω là không gian mẫu) và $n(B)$. Bước này tập trung rèn luyện cho học sinh kỹ năng (KN2).

Bước 3. Xác định $P(AB)$: Tính xác suất đồng thời xảy ra cả hai biến cố A và B. Muốn tính ta cần diễn đạt chính xác biến cố AB để từ đó có thể tính đúng $n(AB)$. Việc thực hiện bước này góp phần hình thành các kỹ năng (KN2), (KN3).

Bước 4. Áp dụng công thức: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ để

tính xác suất có điều kiện. Việc thực hiện bước này góp phần hình thành các kỹ năng (KN2), (KN3).

Bước 5. Kiểm tra và kết luận. Bước này có tác dụng trong rèn cho học sinh kỹ năng (KN4).

Ví dụ 1. Một công ty dược phẩm muốn so sánh tác dụng của hai loại thuốc M và N. Công ty đã tiến hành thử nghiệm với 4000 bệnh nhân mắc bệnh X, trong đó 2400 bệnh nhân dùng thuốc M, 1600 bệnh nhân còn lại dùng thuốc N. Kết quả như sau:

- Trong 2400 bệnh nhân dùng thuốc M thì có 1600 người khỏi bệnh và 800 người không khỏi bệnh.

- Trong 1600 bệnh nhân dùng thuốc N thì có 1200 người khỏi bệnh và 400 người không khỏi bệnh.

Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân trong số 4000 bệnh nhân thử nghiệm sau khi uống thuốc. Tính xác suất để bệnh nhân đó:

a) Uống thuốc M, biết rằng bệnh nhân đó khỏi bệnh.

b) Uống thuốc N, biết rằng bệnh nhân đó không khỏi bệnh (Hà Huy Khoái và cộng sự, 2024).

Giải:

a) *Bước 1.* Gọi A là biến cố: “Người bệnh nhân đó uống thuốc loại M”; B là biến cố: “Người bệnh nhân đó khỏi bệnh”.

Khi đó $P(AB)$ là biến cố: “Người bệnh nhân đó uống thuốc loại M và khỏi bệnh”. Ta cần tính $P(A | B)$.

Bước 2. Tính $P(B)$. Ta thấy, không gian mẫu là 4000 bệnh nhân tham gia thử nghiệm thuốc nên $n(\Omega) = 4000$. Tổng số người khỏi bệnh là $1600 + 800 = 2400 \Rightarrow n(B) = 2400$.

$$\text{Do vậy, } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2400}{4000}.$$

Bước 3. Xác định $P(AB)$. Từ việc đặt các biến cố ta thấy, biến cố AB là “Người bệnh nhân đó uống thuốc loại M và người bệnh nhân đó khỏi bệnh”.

$$\text{Nên } n(AB) = 1600. \text{ Do đó, } P(AB) = \frac{n(AB)}{n(\Omega)} = \frac{1600}{4000}.$$

$$\text{Bước 4. Áp dụng công thức: } P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ ta có}$$

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1600}{2400} \approx 0,667.$$

Bước 5. Kết luận: Vậy xác suất để chọn được người bệnh uống thuốc M, biết rằng bệnh nhân đó khỏi bệnh là 0,667, hay 6,67%.

b) *Bước 1.* Gọi A là biến cố: “Người bệnh nhân đó uống thuốc loại M”; B là biến cố: “Người bệnh nhân đó khỏi bệnh”. Nên $\bar{A}$ là biến cố: “Người bệnh nhân đó uống thuốc loại N”; $\bar{B}$ là biến cố: “Người bệnh nhân đó không khỏi bệnh”. Khi đó $\bar{A}\bar{B}$ là biến cố: “Người bệnh nhân đó uống thuốc loại N và không khỏi bệnh”. Ta cần tính $P = P(\bar{A} | \bar{B})$.

Bước 2. Tính $P = P(\bar{B})$. Ta có, $n(\Omega) = 4000$. Tổng số người không khỏi bệnh là $800 + 400 = 1200 \Rightarrow n(\bar{B}) = 1200$. Do vậy, $P(\bar{B}) = \frac{n(\bar{B})}{n(\Omega)} = \frac{1200}{4000}$.

Bước 3. Xác định $P(\bar{A}\bar{B})$. Ta có $n(\bar{A}\bar{B}) = 400$. Do đó, $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{n(\bar{A}\bar{B})}{n(\Omega)} = \frac{400}{4000}$.

Bước 4. Áp dụng công thức xác suất có điều kiện

$$\text{ta có: } P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{400}{1200} \approx 0,333.$$

Bước 5. Kết luận: Vậy xác suất để chọn được người bệnh uống thuốc N, biết rằng bệnh nhân đó không khỏi bệnh là 0,333, hay 3,33%.

3.2.2. Quy trình giải bài toán tính xác suất toàn phần

Ta nhận thấy, trong bài toán tính xác suất có điều kiện, xác suất để biến cố A xảy ra phụ thuộc vào việc xảy ra biến cố B. Tuy nhiên, trong thực tế một hiện tượng xảy ra hoặc không xảy ra có thể do nhiều nguyên nhân khác nhau. Do vậy, công thức xác suất toàn phần giúp ta trả lời câu hỏi “Xác suất của biến cố A bằng bao nhiêu khi A xảy ra có thể do nhiều nguyên nhân khác nhau”? Công thức xác suất toàn phần giúp tính xác suất của một biến cố thông qua việc chia không gian mẫu thành các phần không giao nhau, mỗi phần tương ứng với một biến cố đơn lẻ, công thức này được biểu diễn qua tổng xác suất của biến cố này xảy ra dưới từng điều kiện riêng biệt.

Các bước để giải bài toán xác suất toàn phần:

Bước 1. Đặt các biến cố, xác định biến cố cần tính xác suất. Bước này giúp học sinh rèn kỹ năng (KN1).

Bước 2. Nhận diện đúng bài toán, học sinh cần trả lời các câu hỏi: Không gian mẫu có được chia thành các trường hợp hay không (có bị phân hoạch hay không); xác suất cần tính có phụ thuộc vào các trường hợp đó hay không? Xác định hệ biến cố đầy đủ $B_1, B_2, \dots, B_n$. Kiểm tra các điều kiện xem các biến cố đó có xung khắc với nhau từng đôi một hay không? $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$). Bước này có tác dụng trong việc rèn cho học sinh kỹ năng (KN2).

Bước 3. Tính xác suất thành phần: Tính các xác suất nhánh $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$.

- Tính các xác suất có điều kiện $P(A | B_1), P(A | B_2), \dots, P(A | B_n)$.

- Áp dụng công thức xác suất toàn phần

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i).$$

Bước này tập trung rèn luyện cho học sinh kỹ năng (KN2), (KN3).

Bước 4. Kiểm tra lời giải và kết luận: Xem xét lại tất cả bước giải ở trên, đặc biệt là xác định xem đã đúng biến cố cần tính xác suất chưa. Kiểm tra lại các điều kiện của biến $B_1, B_2, \dots, B_n$ phải xung khắc từng đôi một và phải tạo thành không gian mẫu. Chú ý điều kiện $0 \leq P(B) \leq 1$ và nếu một trong các $P(A | B_i)$

mà lớn thì không thể quá nhỏ. Bước này sẽ có tác dụng trong rèn cho học sinh kỹ năng (KN4).

Trong trường hợp đơn giản, nếu không gian mẫu chỉ được phân hoạch thành hai biến cố đối nhau là B và $\bar{B}$ thì công thức xác suất toàn phần là:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

Ví dụ 2. Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 20% cư dân hút thuốc lá. Tỷ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp trong số những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá lần lượt là 70%, 15%. Nếu ta gặp một cư dân của xã thì xác suất người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp là bao nhiêu? (Lê Thị Hoài Châu và cộng sự, 2024).

Giải:

Bước 1. Đặt các biến cố: Gọi A là biến cố: “Cư dân đó hút thuốc”; B là biến cố: “Người đó có vấn đề sức khỏe về đường hô hấp”. Ta cần tính P(B).

Bước 2. Nhận diện bài toán: Ta thấy, trong những người có vấn đề sức khỏe về đường hô hấp gồm cả những người hút thuốc và những người không hút thuốc, tức là P(B) phụ thuộc vào cả P(A) và P($\bar{A}$). Do vậy, để tính P(B) ta cần sử dụng công thức xác suất toàn phần.

Bước 3. Tính các xác suất thành phần: Theo bài ra ta có $P(A) = 0,2 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0,8$.

Mặt khác theo bài ra ta có $P(B|A) = 0,7$; $P(B|\bar{A}) = 0,15$. Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A}) \\ &= 0,2.0,7 + 0,8.0,15 = 0,26 \end{aligned}$$

Bước 4. Kiểm tra lời giải và kết luận: Vậy nếu ta gặp một cư dân bất kỳ của xã đó thì xác suất để người đó thường xuyên gặp các vấn đề về sức khỏe đường hô hấp là 0,26.

Ví dụ 3. Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: Hạt trơn và hạt nhăn, có hai kiểu gene ứng với hai kiểu hình này là gene trội B và gene lặn b.

Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một cách độc lập một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Giả sử cây bố và cây mẹ được chọn ngẫu nhiên từ một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỷ lệ cây mang gene bb, Bb tương ứng là 40% và 60%. Tính xác suất để cây con có kiểu gene BB (Hà Huy Khoái và các cộng sự, 2024).

Giải:

Bước 1. Đặt các biến cố: Gọi A là biến cố: “Cây bố có kiểu gene bb”; M là biến cố: “cây con lấy gene B từ cây bố”; N là biến cố: “cây con lấy gene B từ cây mẹ”; E là biến cố: “cây con có kiểu gene BB”. Ta cần tính P(E).

Bước 2. Nhận diện bài toán: Theo bài ra ta có, do cây con lấy ngẫu nhiên một cách độc lập một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ nên M và N là hai biến cố độc lập, hay $P(E) = P(M).P(N)$.

Ta thấy, P(M) là xác suất để “cây con lấy gene B từ cây bố”, trong đó cây bố có thể mang một trong hai kiểu gene bb hoặc Bb. Do vậy, để tính P(M) ta cần sử dụng công thức xác suất toàn phần, tức là:

$$P(M) = P(A).P(M|A) + P(\bar{A}).P(M|\bar{A})$$

Bước 3. Tính các xác suất thành phần: Theo bài ra ta có $P(A) = 0,4 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0,6$.

Mà P(M|A) là xác suất để cây con lấy gene B từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene bb. Do vậy $P(M|A) = 0$ $P(M|\bar{A})$ là xác suất để cây con lấy gene B từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene Bb. Do vậy $P(M|\bar{A}) = 0,5$. Nên $P(M) = 0,4.0 + 0,6.0,5 = 0,3$.

Gọi K là biến cố: “Cây mẹ có kiểu gene Bb”. Hoàn toàn tương tự ta có:

$$P(N) = P(K).P(N|K) + P(\bar{K}).P(N|\bar{K}).$$

Từ đó ta tính được $P(N) = 0,3$.

Do vậy, $P(E) = P(M).P(N) = 0,3.0,3 = 0,09$.

Bước 4. Kiểm tra và kết luận: Vậy xác suất để cây con có kiểu gene Bb là: 0,09.

Nhận xét: Bài toán trong ví dụ 3 là bài toán khó vì để giải quyết bài toán này, học sinh không chỉ hiểu về xác suất toàn phần mà còn hiểu về công thức nhân xác suất. Do vậy, việc đặt đúng các biến cố, thực hiện đúng quy trình giải giúp học sinh giải quyết được bài toán và tránh những sai lầm có thể mắc phải trong quá trình tính toán.

3.2.3. Quy trình giải bài toán sử dụng công thức Bayes

Công thức Bayes là một công thức quan trọng trong xác suất, cho phép chúng ta tính xác suất của một nguyên nhân (hoặc giả thuyết) dựa trên các bằng chứng quan sát được, tức là nếu A đã xảy ra, nguyên nhân nào có khả năng nhất? “Đã thấy kết quả $\rightarrow$ suy ngược nguyên nhân”. Hay nói cách khác, công thức Bayes cho phép tính xác suất có điều kiện ngược lại, từ đó giúp cập nhật xác suất tiên nghiệm dựa trên thông tin mới thu thập được.

Công thức Bayes là một công thức quan trọng trong xác suất, cho phép xác định xác suất của một nguyên nhân hoặc giả thuyết khi đã biết kết quả quan sát được. Nói cách khác, khi một biến cố đã xảy ra, công thức Bayes giúp đánh giá nguyên nhân nào có khả năng dẫn đến biến cố đó lớn nhất, tức là thực hiện quá trình “từ kết quả suy ngược nguyên nhân”. Đồng thời, công thức này còn cho phép tính các xác suất có điều kiện theo chiều ngược lại và cập nhật xác suất tiên nghiệm dựa trên những thông tin mới thu nhận được.

Công thức Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$

Trong đó: $P(B|A)$: Xác suất của B với điều kiện A (xác suất hậu nghiệm); $P(A|B)$ là xác suất của A với điều kiện B; $P(B)$: Xác suất của B (xác suất tiên nghiệm). $P(A)$: Xác suất của A (xác suất biên).

Các bước để giải bài toán tính xác suất theo công thức Bayes như sau:

Bước 1. Phân tích bài toán và xác định các sự kiện: Xác định các biến cố A và B trong bài toán, xác định xác suất cần tính, xác định công thức xác suất cần sử dụng để giải quyết bài toán (nhận dạng bài toán). Bước này chú trọng vào bồi dưỡng kĩ năng (KN1) cho học sinh.

Bước 2. Tìm các xác suất thành phần: Xác định các xác suất $P(A)$, $P(B)$ và $P(A|B)$. Bước này giúp học sinh rèn luyện các kĩ năng (KN2), (KN3).

Bước 3. Sử dụng công thức Bayes để tính $P(B|A)$. Bước này giúp học sinh rèn luyện kĩ năng (KN3).

Bước 4. Kiểm tra và kết luận. Bước này giúp học sinh rèn luyện kĩ năng (KN4).

Ví dụ 4. Một loại vaccine được tiêm ở địa phương X. Người có bệnh nền thì với xác suất 0,35 có phản ứng phụ sau tiêm; người không có bệnh nền thì chỉ có phản ứng phụ sau tiêm với xác suất 0,16. Chọn ngẫu nhiên một người được tiêm vaccine và người này có phản ứng phụ. Tính xác suất để người này có bệnh nền, biết rằng tỉ lệ người có bệnh lí nền ở địa phương X là 18% (Hà Huy Khoái và cộng sự, 2024).

Giải:

Bước 1. Phân tích bài toán và xác định các sự kiện: Gọi A là biến cố: “Người được chọn có bệnh lí nền”; B là biến cố: “Người đó có phản ứng phụ sau tiêm”. Ta cần tính $P(A|B)$. Tuy nhiên, theo bài ra

ta thấy cả người có bệnh lí nền và người không bị bệnh lí nền thì vẫn có thể bị phản ứng phụ sau tiêm vaccine. Do vậy, để tính $P(A|B)$ ta cần sử dụng công thức Bayes.

Bước 2. Tìm các xác suất thành phần: Theo bài ra ta có, $P(A) = 0,18 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0,82$, $P(B|A) = 0,35$, $P(B|\bar{A}) = 0,16$.

Bước 3. Áp dụng công thức Bayes ta có:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{0,18.0,35}{0,18.0,35 + 0,82.0,16} \approx 0,3244 \end{aligned}$$

Bước 4. Kiểm tra và kết luận: Vậy khi chọn ngẫu nhiên một người được tiêm vaccine và người này có phản ứng phụ thì xác suất để người này có bệnh lí nền là 0,3244, cao hơn tỉ lệ trung bình người ở địa phương bị mắc bệnh lí nền.

4. Kết luận

Sự xuất hiện chủ đề Xác suất có điều kiện trong Chương trình môn Toán là một trong những điểm mới quan trọng và có tính ứng dụng cao trong thực tiễn. Tuy nhiên, chủ đề này cũng đặt ra những thách thức mới cho học sinh và giáo viên trong quá trình dạy học. Nghiên cứu đã đạt được hai kết quả là: Chỉ ra được những kĩ năng giải toán cần thiết của học sinh khi học tập chủ đề Xác suất có điều kiện và đề xuất quy trình giải quyết ba dạng toán thuộc chủ đề này, kết quả nghiên cứu này của bài viết có thể được vận dụng vào trong quá trình dạy học chủ đề nhằm nâng cao chất lượng dạy học. Tuy nhiên, hạn chế lớn nhất của bài viết này là mới dừng lại ở nghiên cứu về lí luận mà chưa có thực nghiệm sư phạm. Một hạn chế nữa của nghiên cứu này là đã không đề cập đến biểu diễn trực quan như việc sử dụng sơ đồ hình cây trong giải các bài toán thuộc chủ đề Xác suất có điều kiện trong chương trình môn Toán ở trường phổ thông. Do vậy, trong nghiên cứu tiếp theo, những kết quả nghiên cứu này có thể được triển khai vào thực tiễn để có thể đánh giá hiệu quả của chúng từ đó có thể vận dụng rộng rãi vào thực tiễn dạy học chủ đề này ở trường phổ thông. Những ưu điểm cũng như những hạn chế của việc sử dụng sơ đồ hình cây trong giải bài toán thuộc chủ đề Xác suất có điều kiện cũng sẽ được đề cập đến trong các nghiên cứu tiếp theo.

Tài liệu tham khảo

- Ancker, J. S, (2006). The Language of Conditional Probability. *Journal of Statistics Education*, 14:2, DOI: 10.1080/10691898.2006.11910584.
- Bùi Anh Kiệt, Trần Hiếu Phát (2024). Vận dụng lí thuyết kiến tạo xã hội vào dạy học giải bài tập xác suất có điều kiện lớp 12. *Tạp chí Khoa học, Đại học Cần Thơ*, tập 60, số 4C, tr.187-196.
- Cao Thị Hà, Tạ Công Sơn, Phạm Đình Tùng (2024). Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học chủ đề “Xác suất có điều kiện” (Toán 12). *Tạp chí Giáo dục*, số 24 (24), tr.53-58.
- Cox, D. R & Efron, B. (2017). Statistical thinking for 21st century scientists. *Science Advances*, 3(6), e1700768.
- Đỗ Thị Trinh. (2017). Rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh thông qua sử dụng phép biến hình. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, số 136.
- Hà Huy Khoái (Tổng chủ biên). (2024). *Toán 12, tập 2*. NXB Giáo dục Việt Nam.
- İncebacak, B. B & Ersoy, E. (2016). Problem solving skills of secondary school students. *China-USA Business Review*, 15(6), pp.275-285. doi: 10.17265/1537-1514/2016.06.002.
- Lê Thị Hoài Châu (chủ biên). (2012). *Dạy học xác suất – thống kê ở trường phổ thông*. NXB Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.
- Lê Thị Hoài Châu (Tổng chủ biên). (2024). *Toán 12, tập 2*. NXB Đại học Huế.
- Nguyễn Ái Quốc. (2022). Dạy học xác suất có điều kiện ở lớp 12 theo Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, tập 18, số 111, tr.40-46.
- Nguyễn Bá Kim. (2011). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm. Hà Nội.
- Nguyễn Thị Duyên, Nguyễn Lộc Trường Tài, Nguyễn Thị Mai Thủy. (2025). Hiểu nhầm khái niệm của học sinh trong học tập chủ đề “Xác suất có điều kiện” (Toán 12): Một nghiên cứu trường hợp. *Tạp chí Giáo dục*, số 25 (12), tr.30-35.
- Nguyễn Thị Xuân Mai, Nguyễn Dương Hoàng. (2017). Một số biện pháp bồi dưỡng năng lực phân tích tìm lời giải bài toán cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề phương pháp tọa độ trong mặt phẳng-hình học 10. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Đồng Tháp*, số 27.
- Osman, S., Yang, C. N. A. C., Abu, M. S., Ismail, N., Jambari, H & Kumar, J. A. (2018). Enhancing students' mathematical problem-solving skills through bar model visualisation technique. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(3), pp.273-279. <https://doi.org/10.12973/iejme/3919>.
- Özreçberoğlu, N & Çağanağa, Ç. K. (2018). Making it count: Strategies for improving problem-solving skills in mathematics for students and teachers' classroom management. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(4), pp.1253-1261. doi: 10.29333/ejmste/82536.
- Phạm Huyền Trang, Nguyễn Ái Quốc, Nguyễn Ngọc Giang, Nguyễn Lê Quốc Bảo (2025). Bồi dưỡng năng lực giao tiếp toán học cho học sinh trong dạy học chủ đề “Xác suất có điều kiện” ở lớp 12. *Tạp chí Giáo dục*, tập 25, số đặc biệt 3.
- Quách Thị Sen. (2021). Vận dụng phương pháp dạy học khám phá vào dạy học Xác suất và Thống kê cho sinh viên. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, số 42, tr.13-18.
- Tarr, J.E., Lannin, J.K. (2005). How Can Teachers Build Notions of Conditional Probability and Independence?. In: Jones, G.A. (eds) *Exploring Probability in School. Mathematics Education Library*, vol 40. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_10.
- Tarr, J. E, (2002), *The confounding effects of “50-50 chance” in making conditional probability judgments, Focus on Learning Problems in Mathematics*, 24, pp.35-53.
- Võ Xuân Mai, Lê Ngọc Oanh (2025). Phát triển năng lực mô hình hóa toán học cho học sinh lớp 12 thông qua dạy học chủ đề xác suất có điều kiện. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Đồng Tháp*, tập 14, số đặc biệt 05, tr.27-38.