

MANIFESTATIONS OF MATHEMATICS REASONING AND THINKING THROUGH THE LANGUAGE CHANNEL IN TEACHING MATHEMATICS AT THE UPPER SECONDARY LEVEL IN VIETNAM

Nguyen Thi My Hang

Email: nguyenmyhang3008@gmail.com

Faculty of Education, Vinh University
182 Le Duan street, Truong Vinh ward,
Nghe An province, Vietnam

Received: 08/10/2025

Revised: 27/10/2025

Accepted: 05/11/2025

Published: 20/12/2025

Abstract: The study was conducted in the context of general education reform towards competency development, aiming to clarify the manifestations of Mathematics reasoning and thinking - a core component of mathematical competence defined in the 2018 Mathematics Curriculum - through the language channel at the upper secondary level. Employing analytical and synthetic methods of literature review, including works in philosophy, psychology, and education, in combination with international comparisons, the study proposes a descriptive framework of observable manifestations of mathematical reasoning and thinking expressed through language. This framework is illustrated with teaching situations in the topic of exponential and logarithmic functions, showing how to identify the operational levels of reasoning and thinking through students' speech, writing, symbols, and representations. The results provide both theoretical and practical foundations for designing learning activities and developing assessment tools for the component of Mathematics reasoning and thinking within mathematical competence, based on language observation in classroom settings.

Keywords: *Mathematics reasoning and thinking; mathematical language; manifestations of reasoning.*

BIỂU HIỆN CỦA TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC THÔNG QUA KÊNH NGÔN NGỮ TRONG DẠY HỌC TOÁN CẤP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG Ở VIỆT NAM

Nguyễn Thị Mỹ Hằng

Email: nguyenmyhang3008@gmail.com

Trường Sư phạm, Trường Đại học Vinh
182 Lê Duẩn, phường Trường Vinh,
tỉnh Nghệ An, Việt Nam

Nhận bài: 08/10/2025

Chỉnh sửa xong: 27/10/2025

Chấp nhận đăng: 05/11/2025

Xuất bản: 20/12/2025

Tóm tắt: Nghiên cứu được thực hiện trong bối cảnh đổi mới giáo dục phổ thông theo định hướng phát triển năng lực, nhằm làm rõ biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học - một thành tố của năng lực Toán học trong Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018 - thông qua kênh ngôn ngữ ở cấp Trung học phổ thông. Bằng phương pháp phân tích và tổng hợp tài liệu, bao gồm các công trình về triết học, tâm lý học và giáo dục học, kết hợp đối sánh quốc tế, nghiên cứu đã đề xuất khung mô tả các biểu hiện có thể quan sát của tư duy và lập luận Toán học qua kênh ngôn ngữ. Khung này được minh họa bằng một số tình huống dạy học thuộc chủ đề Hàm số mũ và hàm số lôgarit, qua đó thể hiện cách nhận diện mức độ vận hành của tư duy và lập luận thông qua lời nói, chữ viết, kí hiệu và biểu diễn của học sinh. Kết quả nghiên cứu góp phần cung cấp luận cứ lí luận và thực tiễn cho việc thiết kế hoạt động dạy học và phát triển công cụ đánh giá thành tố tư duy và lập luận Toán học dựa trên quan sát ngôn ngữ trong lớp học.

Từ khóa: *Tư duy và lập luận Toán học, ngôn ngữ Toán học, biểu hiện của tư duy.*

1. Đặt vấn đề

Trong bối cảnh đổi mới giáo dục phổ thông theo định hướng phát triển năng lực ở nước ta, việc nhận diện bản chất và biểu hiện của các thành tố năng lực

Toán học giữ vai trò đặc biệt quan trọng trong dạy học và đánh giá kết quả học tập của học sinh. Trong năm thành tố cấu thành năng lực Toán học (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018), tư duy và lập luận Toán học

được xem là nền tảng, bởi các thao tác tư duy và lập luận chi phối toàn bộ quá trình hình thành, phát triển và vận dụng kiến thức Toán học của học sinh. Tuy nhiên, tư duy của người học như một thực thể trừu tượng, chỉ có thể được nhận biết thông qua những biểu hiện trong học tập, đặc biệt là qua kênh ngôn ngữ, thông qua tương tác trong lớp học.

Từ góc độ triết học và logic học, ngôn ngữ là hình thức biểu hiện bên ngoài của tư duy, là phương tiện để con người phản ánh và truyền đạt tư tưởng (Ăngghen, 2010; Phạm Văn Đức và cộng sự, 2021). Theo đó, với dạy học Toán, ngôn ngữ không đơn giản chỉ là diễn đạt, mà còn là biểu hiện của tư duy Toán học, nhờ đó có thể hiểu được quá trình hình thành, vận hành và phát triển của nó. Trong lớp học Toán, lời nói, kí hiệu, biểu đồ hay bài viết của học sinh... đều được xem là kênh biểu hiện của tư duy và lập luận. Thông qua đó, người học không chỉ hiển thị hiểu biết về nội dung Toán học mà còn bộc lộ thao tác tư duy, quy nạp, diễn dịch, chứng minh hay phản biện. Vì vậy, nghiên cứu biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học qua kênh ngôn ngữ không chỉ giúp hiểu sâu hơn quá trình học Toán mà còn góp phần tạo cơ sở cho việc thiết kế và đánh giá dạy học theo tiếp cận năng lực.

Từ quan điểm khoa học giáo dục, năng lực chỉ có thể được nhận diện thông qua hành vi, sản phẩm hoặc ngôn ngữ của người học (Weinert, 2001). Điều này cho thấy, để dạy học theo tiếp cận năng lực được hiệu quả, trước hết cần mô tả rõ những biểu hiện có thể quan sát được của từng thành tố năng lực. Nhờ đó, giáo viên mới có thể tổ chức hoạt động, nhận diện tiến trình và đánh giá sự phát triển năng lực của học sinh một cách khoa học.

Ở Việt Nam, đã có một số công trình nghiên cứu về tư duy và lập luận Toán học theo định hướng của Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 (Nguyễn Văn Thuận và cộng sự, 2023; Nguyễn Dương Hoàng & Trần Xuân Nam, 2024; Lê Thị Cẩm Nhung, 2022). Các tác giả này chủ yếu mô tả các biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học trong các chủ đề kiến thức, đồng thời đề xuất biện pháp và tình huống dạy học nhằm rèn luyện, phát triển thông qua các biểu hiện đó. Tuy nhiên, phần lớn các nghiên cứu mới dừng ở mức mô tả hoặc định hướng sơ phạm, chưa phân tích sâu cách thức các biểu hiện ấy được thể hiện qua ngôn ngữ học sinh sử dụng trong quá trình học Toán. Khoảng trống này gợi mở một hướng tiếp cận mới: Xem xét tư duy và lập luận Toán học không chỉ ở cấp độ nhận thức bên trong, mà còn ở cấp độ diễn đạt được, thông qua ngôn ngữ, có thể quan sát, phân

tích và phản ánh trực tiếp quá trình tư duy của người học trong lớp học.

Từ cơ sở đó, bài viết này nhằm phân tích các dạng biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học thông qua ngôn ngữ, đồng thời minh họa cách nhận diện các biểu hiện này trong dạy học Toán ở cấp Trung học phổ thông, qua đó góp phần cung cấp luận cứ lí luận và thực tiễn cho việc dạy học và đánh giá kết quả học tập của học sinh theo tiếp cận năng lực.

2. Phương pháp nghiên cứu

Tác giả chủ yếu sử dụng phương pháp nghiên cứu lí luận, nhằm phân tích - tổng hợp tài liệu, kết hợp minh họa sơ phạm, nhằm làm rõ những biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học thông qua kênh ngôn ngữ, đồng thời minh họa cách nhận diện các biểu hiện đó trong dạy học Toán ở cấp Trung học phổ thông.

Trước hết, phân tích - tổng hợp tài liệu để xác định cơ sở lí luận về quan hệ giữa tư duy, lập luận và ngôn ngữ trong dạy học Toán. Nguồn tài liệu chính gồm triết học và logic học (Phạm Văn Đức, 2021; Ăngghen, 2010), tâm lí học (Vygotsky, 1934), cấu trúc năng lực (Weinert, 2001), Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018 (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018), một số công trình nghiên cứu về lập luận và giao tiếp Toán học (Stylianides, 2007; Hjelte và cộng sự, 2020), cùng một số nghiên cứu gần tư duy và lập luận Toán học, giao tiếp Toán học góp phần thực hiện Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018.

Trên cơ sở đó, kết quả phân tích được tổng hợp thành khung mô tả các dạng biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học qua kênh ngôn ngữ, đồng thời được minh họa thông qua tình huống điển hình dạy học môn Toán ở cấp Trung học phổ thông nhằm làm rõ cách nhận diện các biểu hiện này trong thực tiễn lớp học.

3. Kết quả nghiên cứu

3.1. Ngôn ngữ như phương tiện biểu hiện tư duy và lập luận Toán học

Tư duy và lập luận Toán học của học sinh ở cấp Trung học phổ thông được thể hiện qua ba nhóm chủ yếu: "1) Thực hiện được tương đối thành thạo các thao tác tư duy, đặc biệt phát hiện được sự tương đồng và khác biệt trong những tình huống tương đối phức tạp và lí giải được kết quả của việc quan sát; 2) Sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để nhìn ra những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề; 3) Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề. Giải thích, chứng minh, điều

chính được giải pháp thực hiện về phương diện Toán học.” (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018).

Từ bình diện triết học và logic học, ngôn ngữ là hình thức của tư duy, là phương tiện để tư duy trở thành hiện thực, có thể được người khác hiểu, phản hồi và kiểm chứng (Ăngghen, 2010; Phạm Văn Đức và cộng sự, 2021). Trong học toán, mọi thao tác tư duy - từ khái quát, trừu tượng hóa, đến lập luận và chứng minh - đều chỉ có thể biểu hiện ra ngoài thông qua ngôn ngữ: lời nói, chữ viết, kí hiệu... Nói cách khác, ngôn ngữ chính là “kênh biểu hiện” của tư duy và lập luận Toán học khi tương tác trong học tập.

Ở bình diện sư phạm, điều này có ý nghĩa quan trọng: Giáo viên chỉ có thể nhận diện tư duy và lập luận Toán học của học sinh thông qua việc quan sát cách các em nói, viết, trình bày, phản hồi và biểu diễn ý tưởng. Việc học sinh có thể diễn đạt chính xác khái niệm, giải thích một định lí, hoặc điều chỉnh lập luận khi gặp mâu thuẫn cho thấy tư duy của các em đang được vận hành và tự điều chỉnh thông qua ngôn ngữ.

Như vậy, trong phạm vi nghiên cứu này, ngôn ngữ được xem là phương tiện biểu hiện chủ yếu của tư duy và lập luận Toán học. Các dạng biểu hiện cụ thể theo hệ ngôn ngữ - bao gồm ngôn ngữ tự nhiên, thuật ngữ và kí hiệu Toán học, cùng các hình thức biểu diễn - sẽ được trình bày ở mục tiếp theo.

3.2. Các dạng biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học thông qua ngôn ngữ

Trong dạy học toán, học sinh đồng thời sử dụng hai hệ ngôn ngữ chính: Ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ Toán học. Ngôn ngữ Toán học là kết quả của quá trình chuẩn hóa và trừu tượng hóa ngôn ngữ tự nhiên nhằm đảm bảo tính ngắn gọn, chính xác và nhất quán về logic (Nguyễn Văn Thuận, 2004). Hệ ngôn ngữ này bao gồm các thuật ngữ, kí hiệu và biểu diễn Toán học (hình vẽ, đồ thị, bảng giá trị, sơ đồ logic...), xem như biểu hiện của tư duy và giao tiếp đặc thù trong học toán. Ngược lại, ngôn ngữ tự nhiên giữ vai trò nền tảng trong việc hình thành, lí giải và phản biện lập luận. Từ đó, các dạng biểu hiện ngôn ngữ của tư duy và lập luận Toán học có thể được phân tích theo ba phương diện sau:

Thứ nhất, ngôn ngữ tự nhiên trong biểu hiện tư duy và lập luận: Học sinh sử dụng lời nói hoặc chữ viết để mô tả, giải thích, phản biện hoặc khái quát hóa vấn đề Toán học. Biểu hiện cụ thể gồm: Diễn giải khái niệm Toán học bằng lời; Diễn giải chính xác giả thiết và kết luận của bài toán hoặc định lí bằng lời; So sánh, liên hệ, hoặc khái quát từ trường hợp cụ thể;

Trình bày lập luận bằng các cấu trúc ngôn ngữ logic như “nếu ... thì ...”, “vì... nên...”, “giả sử... nên...”, “khi và chỉ khi...”, “cần và đủ ...”, “ắt có và đủ ...”, “Từ đó suy ra...”, ... Những biểu hiện này phản ánh khả năng tư duy bằng ngôn ngữ tự nhiên, đồng thời có thể xem là chỉ báo cho mức độ chặt chẽ của lập luận Toán học.

Thứ hai, thuật ngữ và kí hiệu Toán học trong biểu hiện lập luận: Khi học sinh sử dụng thuật ngữ, kí hiệu hoặc công thức để biểu diễn, chứng minh, hoặc chuyển đổi giữa các biểu diễn, đó là quá trình tư duy đã được trừu tượng hóa ở mức cao. Biểu hiện cụ thể gồm: Viết và đọc đúng biểu thức, mệnh đề, công thức theo trật tự suy luận hợp lí; Dùng kí hiệu và thuật ngữ để tóm tắt, mô hình hóa và chứng minh; Chuyển đổi linh hoạt giữa ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ Toán học (Ví dụ: Từ phát biểu bằng lời sang biểu thức, hoặc ngược lại). Việc học sinh sử dụng đúng và nhất quán hệ thống kí hiệu cho thấy khả năng kiểm soát logic và tính chính xác trong lập luận.

Thứ ba, biểu diễn Toán học và ngôn ngữ phản biện, tự điều chỉnh: Học sinh lựa chọn và giải thích các hình thức biểu diễn phù hợp (hình vẽ, đồ thị, bảng, sơ đồ logic...) để làm sáng tỏ lập luận. Đồng thời, qua quá trình nói - viết - phản hồi, học sinh có thể nhận ra sai sót, đặt câu hỏi hoặc điều chỉnh phát biểu - thể hiện khả năng phản biện và tự điều chỉnh lập luận. Đây là tầng cao của năng lực tư duy, khi người học vừa kiểm tra vừa sửa đổi tiến trình suy luận của chính mình trong học tập.

Các dạng ngôn ngữ trên không tồn tại tách biệt mà đan xen và hỗ trợ nhau trong hoạt động học toán. Việc học sinh chuyển đổi linh hoạt giữa các hình thức biểu đạt - từ lời nói đến kí hiệu và biểu diễn - phản ánh khả năng vận hành các thao tác tư duy, diễn dịch và quy nạp. Từ góc độ dạy học, quan sát cách học sinh nói, viết, biểu diễn và phản biện chính là cơ sở quan trọng để giáo viên nhận diện và đánh giá sự phát triển của tư duy và lập luận Toán học.

3.3. Bằng chứng lí thuyết và thực tiễn về gắn kết giữa ngôn ngữ với tư duy và lập luận Toán học

Mối quan hệ giữa ngôn ngữ, tư duy và lập luận đã được khẳng định trong nhiều lĩnh vực khoa học. Từ góc độ triết học, Ăngghen (2010) và Phạm Văn Đức & cộng sự (2021) chỉ ra rằng ngôn ngữ là hình thức của tư duy, là điều kiện để tư duy trở thành hiện thực và được kiểm chứng. Ở góc độ tâm lí học, Vygotsky (1934) nhấn mạnh rằng, tư duy được hình thành và phát triển thông qua quá trình nội tâm hóa ngôn ngữ: con người “tư duy bằng lời” và điều khiển

tư duy của mình thông qua các cấu trúc ngôn ngữ. Điều này giải thích vì sao việc học sinh nói, viết, tranh luận hay chứng minh đều đồng thời là quá trình tổ chức và phát triển tư duy.

Từ hướng giáo dục học Toán, nhiều nghiên cứu quốc tế đã chỉ ra mối quan hệ chặt chẽ giữa tư duy - lập luận và giao tiếp Toán học. Stylianides (2007) cho rằng, một chứng minh chỉ có giá trị khi có đủ bốn yếu tố: nền tảng, cách thức hình thành, cách biểu diễn và chiều xã hội. Trong đó, hai yếu tố “cách biểu diễn” và “chiều xã hội” cho thấy lập luận Toán học không thể tồn tại độc lập mà phải được thể hiện bằng ngôn ngữ, kí hiệu, biểu đồ và được trao đổi trong cộng đồng học tập. Điều này khẳng định: Lập luận chính là cơ sở để giao tiếp có nội dung và sức thuyết phục. Bên cạnh đó, Cao Thị Hà và cộng sự (2024) trong nghiên cứu về xác suất có điều kiện cũng cho thấy giải thích và chứng minh công thức luôn gắn với hoạt động nêu và trả lời câu hỏi trong lớp học. Vương Vĩnh Phát (2020) chứng minh rằng, hoạt động phân biện nhóm làm tăng số lượng phản ví dụ đúng và tính logic của lời giải; Đỗ Thị Trinh & Đinh Tiến Nguyễn (2022) khẳng định việc nghe - đọc - ghi chép giúp học sinh tích lũy vốn ngôn ngữ Toán học, nâng cao khả năng lập luận; Nguyễn Ngọc Giang & cộng sự (2022) và Nguyễn Dương Hoàng & Trần Xuân Nam (2024) chỉ ra rằng, khi học sinh phải diễn đạt và bảo vệ lập luận, việc sử dụng ngôn ngữ trở thành kênh tất yếu để biểu hiện khả năng lập luận.

Từ một số kết quả trên có thể khẳng định rằng:

Ngôn ngữ là điều kiện cần để khả năng tư duy và lập luận Toán học được hình thành, biểu đạt và kiểm chứng; Chất lượng lập luận phụ thuộc vào khả năng học sinh sử dụng ngôn ngữ Toán học để diễn đạt, giải thích, phản biện và chứng minh; Dạy học Toán cần thiết kế các tình huống buộc học sinh huy động ngôn ngữ trong các hoạt động phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hóa, khái quát hóa, đặc biệt hóa, giải thích, chứng minh, phản biện và điều chỉnh, qua đó hình thành chu trình “ngôn ngữ - tư duy - điều chỉnh” trong lớp học.

Từ cơ sở lí thuyết và thực tiễn đó, phần tiếp theo sẽ mô tả khung mô hình biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học qua kênh ngôn ngữ nhằm định hướng cho việc thiết kế hoạt động dạy học và đánh giá năng lực này ở cấp Trung học phổ thông.

3.4. Mô tả khung biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học qua kênh ngôn ngữ trong dạy học Toán ở trung học phổ thông

Trên cơ sở tổng hợp các kết quả lí thuyết và minh chứng sư phạm, có thể xác định rằng các biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học qua kênh ngôn ngữ được hình thành trong quá trình tương tác liên tục giữa ngôn ngữ - tư duy - điều chỉnh. Trong dạy học Toán, ngôn ngữ không chỉ là phương tiện truyền đạt kiến thức mà còn là môi trường nhận thức, nơi học sinh diễn đạt, kiểm chứng và điều chỉnh tư duy thông qua lời nói, viết, kí hiệu và các hình thức biểu diễn Toán học. Xuất phát từ ba biểu hiện cốt lõi của tư duy và lập luận Toán học được quy định trong

Bảng 1: Biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học qua kênh ngôn ngữ trong dạy học Toán

STT	Biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học	Biểu hiện qua kênh ngôn ngữ trong dạy học Toán	Ví dụ minh họa
1	- Thực hiện được tương đối thành thạo các thao tác tư duy, đặc biệt phát hiện được sự tương đồng và khác biệt trong những tình huống tương đối phức tạp và lí giải được kết quả của việc quan sát.	- Diễn đạt bằng lời quá trình hình thành khái niệm, định lí, mối quan hệ giữa các khái niệm, các định lí.	- Học sinh diễn đạt bằng lời khái niệm căn bậc n của số thực a: “Căn bậc hai của một số thực a không âm là số thực x sao cho bình phương của x bằng a (nghĩa là $x^2 = a$). Căn bậc ba của một số thực a bất kì là số thực x sao cho lập phương của x bằng a (nghĩa là $x^3 = a$). Từ đó, có thể khái quát rằng căn bậc n của số thực a là số thực x sao cho lũy thừa bậc n của x bằng a (tức $x^n = a$). Khi n là số chẵn, a phải là số thực không âm; còn khi n là số lẻ, a có thể là bất kì số thực nào”. - Học sinh diễn đạt bằng lời khái niệm lôgarit cơ số a của số dương b: “Cho hai số thực dương a, b với a khác 1. Số thực c để a mũ c bằng b được gọi là lôgarit cơ số a của b”. - Học sinh giải thích bằng lời “lôgarit cơ số 3 của 81 bằng 4 vì 3 mũ 4 bằng 81”. - Học sinh diễn đạt bằng lời quan hệ giữa hàm số mũ, hàm số lôgarit với hàm số tổng quát: “Hàm số mũ, hàm số lôgarit là các trường hợp đặc biệt của khái niệm hàm số”.

STT	Biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học	Biểu hiện qua kênh ngôn ngữ trong dạy học Toán	Ví dụ minh họa
		- Sử dụng chính xác thuật ngữ, kí hiệu, biểu diễn để diễn đạt khái niệm, định lí, mô tả đặc điểm, nêu ví dụ và phản ví dụ, so sánh tính chất giữa các đối tượng Toán học. - Lí giải bằng lời vì sao một tính chất, quy tắc hay định nghĩa được thiết lập, thể hiện khả năng phân tích và tổng hợp.	- Học sinh sử dụng kí hiệu để viết được định nghĩa khái niệm lôgarit cơ sở a của số dương b: "$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0, a \neq 1$". - Học sinh sử dụng kí hiệu để giải thích $\log_3 81 = 4$ bằng cách viết được: "$\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$". - Học sinh so sánh tính chất biến thiên của hàm số mũ $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) và hàm số lôgarit $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) bằng phát biểu: "Nếu số thực $a > 1$ thì hai hàm số $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$), $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) cùng đồng biến trên tập xác định của mỗi hàm số đó. Nếu $0 < a < 1$ thì hai hàm số đó cùng nghịch biến trên tập xác định của mỗi hàm số này". - Học sinh lí giải bằng lời: "Việc thiết lập phép tính lôgarit xuất phát từ nhu cầu Toán học nhằm giải quyết các vấn đề mà các phép toán số học thông thường không giải được".
2	- Trình bày mạch lập luận bằng ngôn ngữ logic, sử dụng liên từ ("vì - nên", "nếu - thì", "khi và chỉ khi", "ắt có và đủ", "nếu và chỉ nếu", "suy ra", "do đó", ...). - Sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để nhìn ra những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề.	- Học sinh diễn đạt định nghĩa khái niệm lôgarit bằng sử dụng liên từ: "$\log_a b = c$ khi và chỉ khi $a^c = b, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0, a \neq 1$". - Học sinh trình bày (nói, viết) sau khi thiết lập bảng giá trị của hàm số lôgarit cụ thể, chẳng hạn đối với hàm số $y = \log_2 x$: "Vì mỗi giá trị dương của số thực x cho duy nhất một giá trị thực y tương ứng nên tương ứng mỗi giá trị thực x dương với giá trị thực $y = \log_2 x$ xác định một hàm số". - Học sinh trình bày được cách giải phương trình mũ dạng cơ bản $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$) trong tập $\mathbb{R}$, như sau: "Trong tập $\mathbb{R}$, nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm (vì $a^x > 0 \geq b, \forall x \in \mathbb{R}$); nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$". - Khi giải bài toán: "Trên $\mathbb{R}$, trong số các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lôgarit? a) $y = \log_5 5$ b) $y = \log_5 e$ c) $y = \log_5 x$ d) $y = x^5$". Học sinh kết hợp được giữa ngôn ngữ tự nhiên và kí hiệu Toán học để trình bày hay viết được: "Trên $\mathbb{R}$, trong số các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \log_5 x$ có dạng hàm số lôgarit $y = \log_a x$ (với $a = 5 > 0$ và $a \neq 1$). Vậy hàm số $y = \log_5 x$ là hàm số lôgarit". - Học sinh giải thích sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \log_a x$ ($a > 1$) từ đồ thị của hàm số đó bằng lời nói: "Ta thấy, trên mặt phẳng tọa độ, đồ thị của hàm số có dạng đi lên kể từ bên trái sang bên phải, nên hàm số đồng biến trên tập xác định của nó". - Chỉ ra được phản ví dụ để kiểm chứng tính đúng đắn của lập luận. - Học sinh nhận ra sai lầm khi lập luận: "Vì $\log_2 4 = 2$ và $\log_2 2 = 1, 4 = 2 + 2$ nên $\log_2(2 + 2) = \log_2 2 + \log_2 2$", do đó khái quát hóa ta có: $\log_a(x + y)$ bằng cách chỉ ra phản ví dụ, như: $\log_2(4 + 4) = \log_2 8 = 3$ nhưng $\log_2 4 + \log_2 4 = 2 + 2 = 4$	
3	- Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề. Giải thích, chứng minh, điều chỉnh được giải pháp thực hiện về phương diện Toán học. - Sử dụng ngôn ngữ để phản biện, tự điều chỉnh và hoàn thiện lập luận.	- Khi một bạn nói: "Hàm số mũ luôn đồng biến", bạn khác nhận ra sai lầm của bạn đó và phản biện: "Khẳng định của bạn chỉ đúng khi cơ số lớn hơn 1; nếu cơ số dương nhưng nhỏ hơn 1 thì hàm số đó nghịch biến.", đồng thời tự hoàn chỉnh lại "Trên tập xác định, hàm số mũ $y = a^x$ đồng biến khi cơ số a lớn hơn 1, nghịch biến khi cơ số a dương nhưng nhỏ hơn 1".	

STT	Biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học	Biểu hiện qua kênh ngôn ngữ trong dạy học Toán	Ví dụ minh họa
		- Đặt câu hỏi hoặc phát hiện sai sót, điều chỉnh phát biểu, sửa lại mệnh đề sai hoặc kết luận chưa chính xác.	- Học sinh có thể đặt câu hỏi tại sao hàm số mũ với cơ số a lại đồng biến khi a lớn hơn 1, nghịch biến khi a dương nhỏ hơn 1? - Học sinh phát hiện sai lầm về thuật ngữ trong diễn đạt “đồ thị hàm số $y = a^x$ ($a > 1$) đồng biến” và sửa lại thành phát biểu đúng: “hàm số $y = a^x$ ($a > 1$) đồng biến trên $(0; +\infty)$”.
	- Diễn đạt lại bằng ngôn ngữ khác (từ biểu thức sang lời nói, hoặc từ lời sang biểu diễn) nhằm làm rõ cách hiểu đúng.		- Học sinh diễn đạt lại tính chất “Với ba số thực dương a, x, y và $a \neq 1$, ta có $a \neq 1$ ta có: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ và $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$” bằng lời nói: “Với ba số thực dương a, x, y và $a \neq 1$, ta có lôgarit cơ số a của một tích, x nhân y, bằng tổng các lôgarit của từng thừa số x, y (cùng cơ số a). Đồng thời, lôgarit cơ số a của một thương, x chia cho y, bằng hiệu các lôgarit của số bị chia x và số chia y (cùng cơ số a)”.

Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018), bài viết đề xuất khung mô tả các biểu hiện qua kênh ngôn ngữ và minh họa một số tình huống thuộc chủ đề Hàm số mũ và hàm số lôgarit (Bảng 1).

Ba nhóm biểu hiện nêu trong khung ở trên được xây dựng theo logic nội tại của tư duy và lập luận Toán học trong Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán, từ thao tác tư duy đến lập luận có căn cứ, phản biện và điều chỉnh. Mỗi biểu hiện tương ứng với một số dạng hành động ngôn ngữ có thể quan sát trong lớp học. Chẳng hạn, khi học sinh sử dụng thuật ngữ, kí hiệu và biểu diễn Toán học một cách chính xác, đó không chỉ là hành vi ngôn ngữ mà còn là dấu hiệu của việc tư duy đã được khái quát hóa và trừu tượng hóa. Việc trình bày mạch lập luận bằng ngôn ngữ logic phản ánh khả năng tổ chức và kiểm chứng tư duy, còn nêu câu hỏi, phản biện hoặc điều chỉnh phát biểu thể hiện khả năng tự điều khiển và đánh giá lập luận của bản thân. Do đó, ngôn ngữ trong khung này được xem là phương tiện vật chất hóa tư duy, giúp chuyển hóa quá trình nhận thức trừu tượng thành những biểu hiện có thể nhận biết, đánh giá và bồi dưỡng trong thực tiễn dạy học Toán ở nước ta.

4. Kết luận

Bài viết đã góp phần làm sáng tỏ cơ sở lí luận cho nhận định rằng, ngôn ngữ là kênh biểu hiện chủ yếu của tư duy và lập luận Toán học, qua đó cho thấy năng lực - vốn là một cấu trúc tiềm ẩn - có thể được quan sát và đánh giá một cách khách quan, thông

qua biểu hiện của nó trong thực tiễn lớp học. Trên nền tảng đó, nghiên cứu đã đề xuất khung mô tả các biểu hiện của tư duy và lập luận Toán học qua kênh ngôn ngữ, gắn với ba nhóm biểu hiện cốt lõi của nó, ở cấp Trung học phổ thông. Mỗi nhóm được minh chứng bằng những hành động ngôn ngữ cụ thể, giúp giáo viên có cơ sở nhất quán để quan sát, ghi nhận và đánh giá quá trình học tập của học sinh. Minh họa ở chủ đề Hàm số mũ và hàm số lôgarit cho thấy hiệu lực sư phạm của khung, thể hiện ở việc thiết kế hoạt động buộc học sinh huy động ngôn ngữ - diễn giải, chuyển đổi biểu diễn, nêu lí lẽ, chứng cứ, phát hiện và sửa sai - qua đó làm lộ rõ quá trình lập luận Toán học.

Về hàm ý sư phạm, bài viết nhấn mạnh rằng, khi thiết kế hoạt động học, giáo viên cần quy định rõ đầu ra, biểu hiện qua ngôn ngữ trong từng hoạt động (mẫu câu lập luận, kí hiệu, yêu cầu biểu diễn), đồng thời tổ chức dạy học giàu tương tác nói - viết - biểu diễn để kích hoạt chu trình “ngôn ngữ - tư duy - điều chỉnh”. Bên cạnh đó, cần phát triển công cụ đánh giá thành tố tư duy và lập luận Toán học dựa trên quan sát ngôn ngữ trong lớp học, nhằm bảo đảm tính khách quan và độ tin cậy của đánh giá kết quả học tập của học sinh. Do khuôn khổ của bài báo nên tác giả chưa thể trình bày về thực nghiệm, kiểm định độ tin cậy và giá trị sử dụng của khung mô tả. Do đó, sẽ tiếp tục thu thập và phân tích dữ liệu lớp học nhằm kiểm chứng và hoàn thiện khung trên nhiều chủ đề và bối cảnh khác nhau sẽ trình bày ở bài báo tới.

Tài liệu tham khảo

- Ăngghen, Ph. (2010). *Biện chứng của tự nhiên (bản dịch tiếng Việt)*. NXB Chính trị Quốc gia.
- Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018). *Chương trình Giáo dục phổ thông - Chương trình môn Toán*.
- Cao Thị Hà, Tạ Công Sơn, Phạm Đình Tùng. (2024). Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học chủ đề “Xác suất có điều kiện” (Toán 12). *Tạp chí Giáo dục*, 24(24), 53-58.
- Đỗ Thị Trinh, Đinh Tiến Nguyễn. (2022). Một số biện pháp phát triển năng lực giao tiếp Toán học cho học sinh trong dạy học nội dung “Lượng giác” ở trung học phổ thông. *Tạp chí Giáo dục*, 22(16), 12-16.
- Hjelte, A., Schindler, M. & Nilsson, P. (2020). Kinds of Mathematical Reasoning Addressed in Empirical Research in Mathematics Education: A Systematic Review. *Education Sciences*, 10(10), 289. <https://www.mdpi.com/2227-7102/10/10/289>
- Lê Thị Cẩm Nhung. (2023). Dạy học yếu tố hình học ở tiểu học theo hướng phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học cho học sinh. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, 32, 37-42.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Nguyễn Dương Hoàng, Trần Xuân Nam. (2024). Một số biện pháp bồi dưỡng năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh lớp 10 trong dạy học chủ đề “Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng”. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 13(01S), 303-310. <https://doi.org/10.52714/dthu.13.01S.2024.1323>
- Nguyễn Ngọc Giang, Nguyễn Thị Thủy, Phạm Thị Thu Nga & Hà Như Mai. (2022). Dạy học giải một số bài toán gắn với thực tiễn nhằm phát triển năng lực giao tiếp Toán học cho học sinh lớp 9. *Tạp chí Giáo dục*, 22(24), 13-18.
- Nguyễn Thị Kiều Nga. (2024). Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận Toán học cho học sinh trong dạy học giải các bài toán chủ đề “Đa thức” ở trung học cơ sở. *Tạp chí Giáo dục*, 24(12), 6-10.
- Nguyễn Văn Thuận. (2004). *Góp phần phát triển năng lực tư duy logic và sử dụng chính xác ngôn ngữ Toán học cho học sinh đầu cấp Trung học phổ thông trong dạy học Đại số*. Luận án tiến sĩ Khoa học Giáo dục, Trường Đại học Vinh.
- Nguyễn Văn Thuận, Nguyễn Thị Mỹ Hằng & Nguyễn Thị Xoan. (2023). Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học chủ đề “Đại số tổ hợp” ở trung học phổ thông. *Tạp chí Giáo dục*, 23(7), 1-5.
- Phạm Văn Đức (Chủ biên). (2021). *Giáo trình Triết học Mác – Lênin (Dành cho bậc Đại học hệ không chuyên lý luận chính trị)*. NXB Chính trị Quốc gia - Sự thật.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321. <https://doi.org/10.2307/30034869>
- Vương Vĩnh Phát. (2020). Nghiên cứu một tình huống dạy học hàm số liên tục thông qua tranh luận khoa học nhằm phát triển năng lực giao tiếp Toán học cho học sinh trung học phổ thông. *Tạp chí Giáo dục*, 1(471), 47-51.
- Vygotsky, L. S. (2022). *Tư duy và ngôn ngữ*. (Đào Quốc Minh, Dịch). NXB Hội Nhà văn (Tác phẩm gốc được xuất bản năm 1934).
- Weinert, F. E. (2001). *Concept of competence: A conceptual clarification*. In D. S. Rychen & L. H. Salganik (Eds.), *Defining and selecting key competencies* (pp. 45-65). Seattle, WA: Hogrefe & Huber