

Rèn luyện một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm thông qua dạy học các bài toán thực tế hàm số mũ và hàm số Lôgarit ở lớp 11

Nguyễn Ngọc Giang¹, Nguyễn Ái Quốc²,
Phạm Huyền Trang^{*3}, Nguyễn Minh Hải⁴

¹ Email: giangnn@hub.edu.vn
Trường Đại học Ngân hàng Thành phố Hồ Chí Minh
36 Tôn Thất Đạm, Quận 1,
Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

² Email: naquoc@squ.edu.vn
Trường Đại học Sài Gòn
273 An Dương Vương, Quận 5,
Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

* Tác giả liên hệ

³ Email: phamhuyentrang@hpu2.edu.vn
Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2
32 Nguyễn Văn Linh, thành phố Phúc Yên,
tỉnh Vĩnh Phúc, Việt Nam

⁴ Email: nguyenminhhai.thnk.5a@gmail.com
Trung tâm Giáo dục Nghệ nghiệp - Giáo dục Thường xuyên Quận 12
2 Bis, Đường Tô Ký, Khu phố 3, Quận 12,
Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

TÓM TẮT: Khái niệm hàm, mà một trường hợp riêng là khái niệm hàm số, đóng vai trò quan trọng nếu không nói là đóng vai trò trung tâm trong chương trình Toán phổ thông nói chung và Toán lớp 11 nói riêng. Tư duy hàm liên hệ chặt chẽ với khái niệm hàm số là một loại hình tư duy của toán học cần được rèn luyện cho học sinh. Tư duy hàm đề cập đến sự thay đổi và mối quan hệ giữa các đối tượng. Trong các sách giáo khoa, nội dung các bài toán thực tế minh họa cho khái niệm hàm số nói riêng và tư duy hàm nói chung được đặc biệt chú trọng. Tuy nhiên, việc vận dụng tư duy hàm vào dạy học các bài toán thực tế hàm số mũ và hàm số lôgarit còn là việc làm mới mẻ. Bài viết tập trung nghiên cứu các quan điểm của tư duy, tư duy Toán học, tư duy hàm. Bài viết đưa ra quan niệm, quy trình cũng như cách thức dạy học rèn luyện một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm thông qua dạy học các bài toán thực tế hàm số mũ và hàm số lôgarit ở lớp 11.

TỪ KHÓA: Tư duy, tư duy Toán học, tư duy hàm, bài toán thực tế, hàm số mũ và hàm số lôgarit.

→ Nhận bài 28/02/2024 → Nhận bài đã chỉnh sửa 23/3/2024 → Duyệt đăng 25/5/2024.

DOI: <https://doi.org/10.15625/2615-8957/12420111>

1. Đặt vấn đề

Khái niệm hàm là khái niệm quan trọng trong Toán học không những cấp phổ thông mà còn ở bậc Đại học và sau đại học. Khinshin phát biểu rằng: “Không có khái niệm nào có thể phản ánh những hiện tượng của thực tại khách quan một cách trực tiếp và cụ thể như khái niệm tương quan hàm. Không một khái niệm nào có thể biểu hiện được rõ ở trong nó những nét biện chứng của tư duy toán học hiện đại như khái niệm tương quan hàm”. Liên hệ mật thiết với khái niệm hàm nói chung và hàm số nói riêng là tư duy hàm. Tư duy hàm là một trong những tư duy Toán học thành phần. Tuy nhiên, cho đến nay, nội hàm của tư duy hàm vẫn chưa thực sự rõ ràng. Một số nhà nghiên cứu nhận định rằng, tư duy hàm có ảnh hưởng đến phát triển tư duy logic và tư duy biện chứng một cách tích cực cho học sinh [1].

Trên thực tế, tư duy hàm thường hay bị lẫn lộn với khái niệm hàm [1]. Nhiều giáo viên không rõ tư duy hàm là gì? Các giáo trình về phương pháp dạy học Toán cũng ít đề cập đến tư duy hàm, thậm chí không đề cập đến tư duy hàm nên nhiều giáo viên không nắm được nội hàm mô tả tư duy hàm. Bên cạnh đó, tài liệu về nội dung tư duy hàm nhìn chung còn ít. Những điều

này gây khó khăn và khó tiếp cận cho giáo viên và học sinh [1].

Bài toán thực tế hiện đang được chú trọng trong Chương trình Giáo dục phổ thông tổng thể năm 2018. Chương trình kèm Thông tư 32/2018/TT-BGDĐT đã đề cập đến quan điểm xây dựng chương trình như sau: “Chương trình Giáo dục phổ thông bảo đảm phát triển phẩm chất và năng lực người học thông qua nội dung giáo dục với những kiến thức, kỹ năng cơ bản, thiết thực, hiện đại; hài hòa đức, trí, thể, mỹ; chú trọng thực hành, vận dụng kiến thức, kỹ năng đã học để giải quyết vấn đề trong học tập và đời sống”. Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018 nhấn mạnh quan điểm: “Chương trình môn Toán chú trọng tính ứng dụng, gắn kết với thực tiễn hay các môn học, hoạt động giáo dục khác, đặc biệt với các môn học nhằm thực hiện giáo dục STEM, gắn với xu hướng phát triển hiện đại của kinh tế, khoa học, đời sống xã hội và những vấn đề cấp thiết có tính toàn cầu (như biến đổi khí hậu, phát triển bền vững, giáo dục tài chính,...), tạo cơ hội giúp học sinh vận dụng kiến thức, kỹ năng và kinh nghiệm của bản thân vào thực tiễn một cách sáng tạo” [2]. Như vậy, các bài toán thực tiễn đang là một trong những đối tượng

chủ chốt mà Chương trình Giáo dục phổ thông tổng thể cũng như Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán đề cập.

Tư duy hàm và bài toán thực tế có mối quan hệ hữu cơ, gắn bó chặt chẽ với nhau. Muốn giải các bài toán thực tế, chúng ta thường mô hình hóa bài toán để đưa về các công thức, phương trình, bảng biểu và đặc biệt là đưa về các hàm số. Bằng cách này, chúng ta biểu diễn được bản chất các đối tượng của bài toán, mối quan hệ giữa chúng, sự phụ thuộc và sự kéo theo cũng như hiểu vấn đề một cách cụ thể. Tư duy hàm là dạng tư duy Toán học quan trọng không những giúp chúng ta phân tích, định hướng mà còn giúp giải quyết các bài toán thực tế một cách nhanh chóng và đúng đắn.

Trên thế giới và Việt Nam đã có nhiều công trình bàn về tư duy hàm [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]. Đồng thời, có nhiều công trình bàn về toán thực tế [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19]. Tuy nhiên, nghiên cứu về rèn luyện một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm thông qua dạy học các bài toán thực tế hàm số mũ và hàm số Lôgarit ở lớp 11 còn là chủ đề chưa có nghiên cứu. Từ những lí do trên, chúng tôi tập trung nghiên cứu rèn luyện một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm thông qua dạy học các bài toán thực tế hàm số mũ và hàm số Lôgarit ở lớp 11.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Quan điểm về tư duy

Phan Thị Kim Ngân quan niệm: “Tư duy là một quá trình nhận thức phản ánh những thuộc tính bên trong thuộc về bản chất. những liên hệ và quan hệ có tính quy luật của sự vật và hiện tượng trong hiện thực khách quan, để dẫn lối tri thức mới. Tư duy luôn luôn là một cuộc đối thoại, mở ra những điều khác nhau, vì thế đưa ra những mặt đối lập nhau của thực tiễn khách quan. Tư duy giúp ta khái quát các thuộc tính bản chất của nhiều sự vật, hiện tượng, từ đó rút ra quy luật chung giữa chúng. Tư duy của con người có bản chất xã hội vì nó gắn liền với ngôn ngữ - sản phẩm của đời sống xã hội và cộng đồng. Ngôn ngữ là một trong những chất liệu chính tạo nên tư duy ở mức cao nhất” [20].

Crugliac cho thấy vai trò của tư duy đối với tri thức: “Nhờ tư duy mà có thể chuyển được từ những tri thức sơ đẳng đầu tiên sang những tri thức sâu sắc hơn, chuyển từ hiện tượng sang bản chất và từ bản chất bậc một sang bản chất bậc hai. Tư duy càng phát triển mạnh bao nhiêu thì càng có nhiều khả năng lĩnh hội tri thức một cách có kết quả và sâu sắc và càng có nhiều khả năng vận dụng những tri thức ấy trong hoạt động thực tế bấy nhiêu. Tri thức và tư duy gắn bó với nhau như sản phẩm đi đôi với quá trình. Vì vậy, không thể tách rời tri thức khỏi tư duy, tri thức được bộc lộ ra và hình thành trong tư duy” [21].

Nguyễn Hữu Long định nghĩa tư duy như sau: “Theo khái niệm Tâm lí học, tư duy là quá trình nhận thức lí tính, hoạt động tư duy của con người với động cơ nhận thức và giải quyết tình huống (có) vấn đề gồm các hành động tư duy (theo quy trình tư duy, thực hiện các mục đích của hành động tư duy), các thao tác tư duy sử dụng các phương tiện tư duy (ngôn ngữ, hình ảnh trực quan, hiểu biết của con người có liên quan), phản ánh một cách gián tiếp, khái quát thuộc tính bản chất, quy luật tự nhiên, quy luật xã hội dưới hình thức (kết quả của tư duy) ý nghĩ (khái niệm, câu phán đoán) nhận thức tái tạo, phê phán (ý tưởng) sáng tạo khoa học trong đó có văn học, ý tưởng công nghệ, ý tưởng sáng tạo nghệ thuật... góp phần đổi mới tự nhiên, xã hội và cả bản thân” [22].

Chúng tôi đồng quan điểm với tác giả Phạm Minh Hạc cho rằng: “Trong quá trình tư duy, con người sử dụng phương tiện ngôn ngữ, sản phẩm có tính xã hội cao để nhận thức tình huống có vấn đề, để tiến hành các thao tác tư duy: Phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hóa, khái quát hóa để đi đến những khái niệm, phán đoán, suy lí, những quy luật - những sản phẩm khái quát của tư duy. Trong quá trình phát triển của mình, con người không chỉ tư duy nhằm giải quyết các vấn đề do thực tiễn cuộc sống đặt ra mà con người còn tiến hành tư duy nhằm lĩnh hội nền văn hóa xã hội để hình thành và phát triển nhân cách của mình, trên cơ sở đó đóng góp những kết quả hoạt động của mình vào kho tàng văn hóa xã hội của loài người” [23].

2.2. Quan điểm về tư duy Toán học

Nguyễn Thanh Hưng và Ngô Tùng Nhân coi tư duy Toán học có các tính chất sau: “Là hình thức thể hiện của tư duy biện chứng trong quá trình con người nhận thức khoa học Toán học, hay khi áp dụng Toán học vào các ngành khoa học khác như: Kỹ thuật, Kinh tế,...; Tư duy Toán học có các tính chất đặc thù, được quy định bởi bản chất của khoa học Toán học, sử dụng các phương pháp Toán học để nhận thức các hiện tượng của thế giới hiện thực” [24].

Nhóm tác giả Nourooz Hashemi, Mohd Salleh Abu, Hamidreza Kashefi và Mahani Mokhtar lại quan niệm: “Tư duy Toán học là một quá trình liên quan đến các hoạt động phức tạp, như đặc biệt hóa, dự đoán và tổng quát hóa, giúp cải thiện sự hiểu biết của sinh viên. Quá trình tư duy Toán học diễn ra trong ba thế giới Toán học, gồm thế giới vật thể, thế giới biểu tượng và thế giới hình thức, được gọi là lí thuyết ba thế giới tư duy Toán học” [25].

Trong bài viết này, chúng tôi đồng quan điểm với Lê Duy Phát khi cho rằng, tư duy Toán học bao gồm các tư duy thành phần, đó là: tư duy cụ thể, tư duy trừu tượng, tư duy trực giác, tư duy hàm, tư duy biện chứng, tư duy sáng tạo và các phong cách Toán học của tư duy [1].

2.3. Quan điểm về tư duy hàm

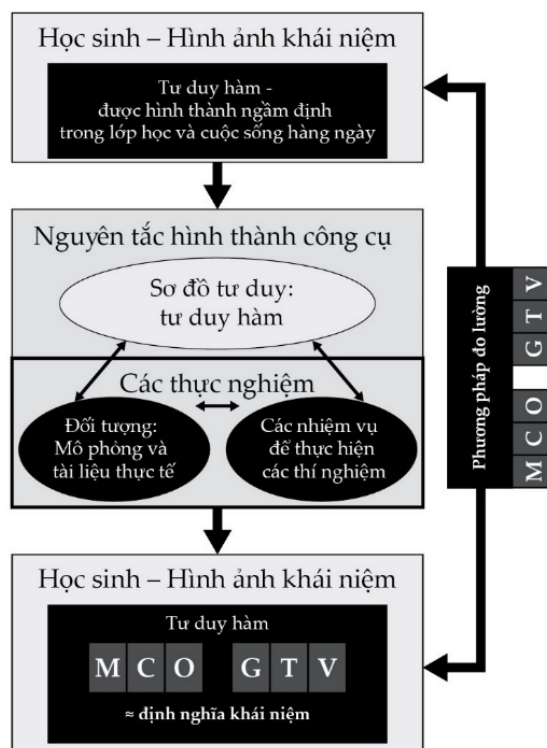
Tư duy hàm là khái niệm quan trọng và có nhiều quan điểm khác nhau. Tư duy hàm là quá trình suy luận dựa vào ngôn ngữ cũng như những biểu diễn khác nhau nhằm xây dựng và khái quát hóa các mô hình cũng như mối quan hệ hay hàm số [3].

Tư duy hàm là một phần của tư duy đại số. Đó là quá trình xây dựng, mô tả cũng như suy luận về các hàm. [26]. Tư duy hàm là một loại tư duy biểu diễn, tập trung vào mối quan hệ giữa hai hay nhiều hơn hai đại lượng biến đổi. Cụ thể, đó là loại tư duy thông qua các trường hợp riêng rẽ để đi từ mỗi quan hệ cụ thể đến mỗi quan hệ tổng quát [26]. Việc giúp học sinh hiểu được khái niệm hàm nên được tiến hành sớm ở mọi chủ đề của Toán học theo nhiều cách thức khác nhau. Học sinh cần hiểu được cách các biến số tương quan với nhau, từ đó giải thích mối quan hệ hàm giữa chúng. Một cách tốt để phát triển và phân tích tư duy hàm của học sinh là vận dụng các cách biểu diễn khác nhau của hàm số, bao gồm ba cách: Hình học (sử dụng sơ đồ, biểu đồ, đồ thị, số học (sử dụng số, bảng), đại số (sử dụng kí hiệu, công thức, sự tương ứng) [3].

Tư duy hàm bao gồm các mối quan hệ hàm số giữa các đại lượng, sự tổng quát hóa và biểu diễn nhằm xác định bản chất của hàm số. Tư duy hàm liên hệ mật thiết đến sự thay đổi, cụ thể sự thay đổi về chất và lượng cũng như mối quan hệ giữa sự thay đổi và khả năng sử dụng những mối quan hệ này để giải quyết vấn đề [26].

Tư duy hàm gồm ba đặc trưng chính là ánh xạ (mapping), hiệp phương sai (covariation) và hàm như là đối tượng (function as object). Mối quan hệ giữa ba đặc trưng này được thể hiện trong sơ đồ sau (xem Hình 1), trong đó M: mapping - ánh xạ; C: covariation - hiệp phương sai; O: function as object - hàm như là đối tượng; G: graph - đồ thị; T: table - bảng; V: verbal description - mô tả bằng lời:

Hình 1 là chu trình biểu diễn giữa tư duy hàm xuất phát từ đời sống thực tiễn cho đến tư duy hàm được hình thành trong Toán học. Bắt đầu là các sự kiện của đời sống hằng ngày ngầm ẩn trong đó tư duy hàm. Chẳng hạn, câu thành ngữ “Trời đang nắng, có gà trống thì mưa” là một sự kiện của đời sống hằng ngày ẩn dấu trong đó tư duy hàm. Tiếp theo, chúng ta cần mô phỏng, thí nghiệm và sử dụng các thực nghiệm để ra được sơ đồ tư duy của tư duy hàm hay tư duy hàm hóa sự kiện cuộc sống. Sau đó, hình ảnh khái niệm về tư duy hàm trong Toán học sau khi đã được tư duy hàm hóa. Tư duy hàm trong Toán học thường được thể hiện qua các thuật ngữ: M: mapping - ánh xạ; C: covariation - hiệp phương sai; O: function as object - hàm như là đối tượng; G: graph - đồ thị; T: table - bảng; V: verbal description - mô tả bằng lời. Sau khi có được tư duy hàm trong Toán học, chúng ta sẽ đo



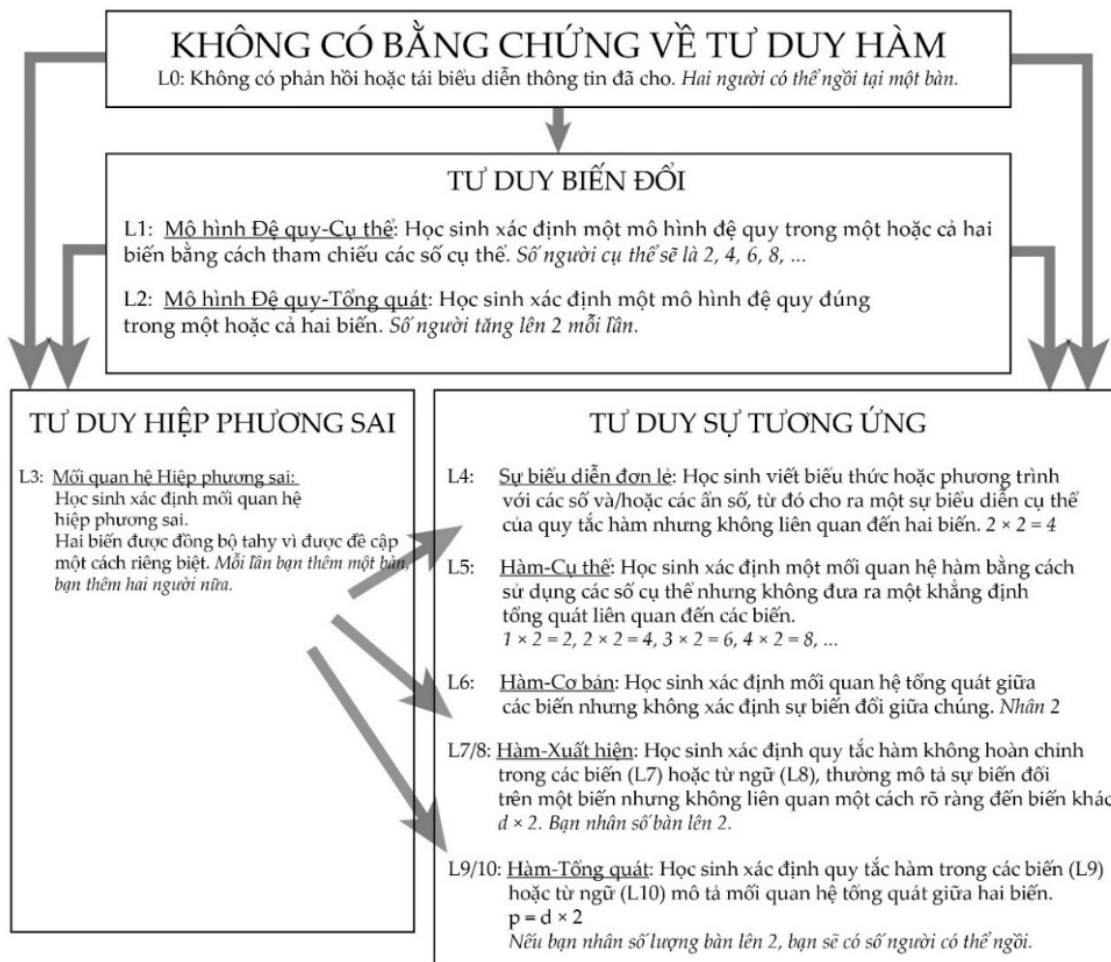
Hình 1: Mô hình thúc đẩy tư duy hàm dựa trên các thực nghiệm với mô phỏng trên máy tính và tài liệu thực tế theo thuyết Nguyên tắc hình thành công cụ [27]

lượng và rút ra kết luận đối với sự kiện ngầm ẩn tư duy hàm trong thực tế. Chu trình này là một chu trình khép kín và có sự tác động qua lại lẫn nhau.

Theo Stephens và cộng sự, tư duy hàm được đặc trưng bằng tư duy biến đổi, tư duy hiệp phương sai và tư duy sự tương ứng. Các đặc trưng này có mối liên hệ chặt chẽ và được thể hiện bởi Hình 2.

Theo Koliagin, tư duy hàm là một loại hình tư duy đặc trưng bởi việc nhận thức được tiến trình những sự tương ứng riêng và chung giữa các đối tượng Toán học hay giữa các tính chất của chúng (kể cả kĩ năng và vận dụng chúng) [9].

Theo Trần Thúc Trinh, tư duy hàm là hoạt động trí tuệ liên quan đến sự tương ứng giữa các phần tử của một hay nhiều tập hợp, phản ánh mối liên hệ phụ thuộc lẫn nhau của chúng [28]. Trần Thúc Trinh, Phạm Đức Quang và Đinh Quang Minh đưa ra định nghĩa tư duy hàm dưới dạng mô tả bản chất như sau: “Tư duy hàm là hoạt động trí tuệ liên quan đến sự tương ứng giữa các phần tử của 1, 2 hay nhiều tập hợp, phản ánh mối liên hệ phụ thuộc lẫn nhau giữa các phần tử của tập hợp đó, trong sự vận động của chúng”. Nói cách khác, tư duy hàm là những hoạt động trí tuệ liên quan đến sự nghiên cứu những quy luật của sự vật, hiện tượng trong trạng thái biến đổi sinh động của chúng chứ không phải trạng thái tĩnh tại, trong sự phụ thuộc lẫn nhau chứ không phải cô lập, tách rời nhau [1].



Hình 2: Các cấp độ phức tạp mô tả quá trình tổng quát và biểu diễn các mối quan hệ hàm của học sinh [8]

Như vậy, các quan điểm về tư duy hàm có một số đặc điểm. Đối với điểm chung: Thứ nhất, tư duy hàm là hoạt động trí tuệ của Toán học; thứ hai, nó sử dụng các thuật ngữ chỉ sự tương ứng, phụ thuộc lẫn nhau, cái này kéo theo cái kia. Đối với điểm riêng, một số công trình dựa vào các bản chất của hàm số để định nghĩa nên tư duy hàm. Một số công trình dựa vào tư duy biện chứng để định hình nó. Chúng tôi đồng ý với quan điểm của Lê Duy Phát khi cho rằng, tư duy hàm là hoạt động trí tuệ nhằm phát hiện, khám phá các tri thức Toán học dựa trên các quy luật về sự tương ứng giữa các tập hợp đối tượng, mối quan hệ phụ thuộc giữa chúng trong trạng thái vận động và biến đổi [1].

2.4. Một số loại khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm

Nguyễn Bá Kim không đưa ra định nghĩa của tư duy hàm một cách trực tiếp. Ông mô tả những tư tưởng chủ yếu về đặc trưng của tư duy hàm cho học sinh gồm:

- *Phát hiện sự tương ứng*: Phát hiện ra sự tương ứng nghĩa là nhận ra các mối liên hệ, chẳng hạn như sự tương ứng giữa tế bào nam men đơn bào và tế bào con, giữa sự biến thiên của các đối tượng.
- *Thiết lập sự tương ứng*: Tạo ra sự tương ứng theo

suy nghĩ chủ quan của học sinh để hỗ trợ cho một nhiệm vụ học tập nào đó.

- *Nghiên cứu sự tương ứng*: Giáo viên yêu cầu học sinh từ các dữ kiện của bài toán, xác lập mối liên hệ giữa các đối tượng, vận dụng kiến thức và kỹ năng đã có để định hướng tìm tòi lời giải bài toán.

- *Sử dụng sự tương ứng*: Giáo viên đưa ra các vấn đề về mối liên hệ giữa các đại lượng để học sinh thiết lập công thức. Từ công thức tìm được, học sinh rút ra đại lượng cần tìm khi biết một số đại lượng đã biết [11].

2.5. Quan niệm về rèn luyện một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm thông qua dạy học các bài toán thực tế hàm số mũ và hàm số Lôgarit ở lớp 11

Trên cơ sở một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm của Nguyễn Bá Kim [11], chúng tôi quan niệm: Rèn luyện một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm thông qua dạy học các bài toán thực tế hàm số mũ và hàm số Lôgarit ở lớp 11 là quá trình luyện tập phát hiện, thiết lập, nghiên cứu, sử dụng sự tương ứng trong các bài toán thực tế về hàm số mũ và hàm số Lôgarit như các bài toán về lãi suất, bài toán góp vốn, vay vốn, chu kỳ bán rã của chất phóng xạ, độ pH trong Hóa học, độ

chấn động trong Địa, Vật lí, độ to nhỏ của âm thanh, bài toán về cường độ ánh sáng, định luật tân nhiệt của Newton,... đến một mức độ thành thực nhất định.

2.6. Quy trình dạy học rèn luyện một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm thông qua các bài toán thực tế hàm số mũ và hàm số Lôgarit ở lớp 11

Trên cơ sở quy trình dạy học khái quát hóa bài toán thực tế về hàm số mũ và hàm số Lôgarit [15], chúng tôi đưa ra quy trình dạy học rèn luyện một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm thông qua các bài toán thực tế hàm số mũ và hàm số Lôgarit ở lớp 11 gồm các bước:

Bước 1: Lựa chọn bài toán thực tế về hàm số mũ và hàm số Lôgarit có khả năng rèn luyện được một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm

- Không phải bài toán thực tế nào về hàm số mũ và hàm số Lôgarit cũng tạo được tình huống rèn luyện tư duy hàm, chính vì thế, giáo viên phải là người lựa chọn bài toán không quá khó, không quá dễ nhưng đủ sức hấp dẫn giúp người học có cảm hứng với chủ đề được học.

- Bước này giúp rèn luyện khía cạnh phát hiện sự tương ứng đối với bài toán hàm số mũ và hàm số Lôgarit.

Bước 2: Xác lập sự tương ứng của bài toán thực tế về hàm số mũ và hàm số Lôgarit

- Thông qua bài toán đưa ra, giáo viên nêu câu hỏi giúp học sinh phát hiện và thiết lập sự tương ứng giữa các đối tượng trong bài. Học sinh trả lời các câu hỏi của giáo viên để tìm ra mối liên hệ giữa các đối tượng.

- Bước này giúp rèn luyện khía cạnh phát hiện và thiết lập sự tương ứng đối với bài toán hàm số mũ và hàm số Lôgarit.

Bước 3: Nắm vững sự tương ứng để đưa ra cách thức giải quyết bài toán thực tế về hàm số mũ và hàm số Lôgarit

- Học sinh xem xét, tìm hiểu kĩ sự tương ứng đưa ra phương án, thuật toán giải quyết sự xác lập tương ứng ở bước 2.

- Bước này giúp rèn luyện khía cạnh nghiên cứu sự tương ứng đối với bài toán hàm số mũ và hàm số Lôgarit.

Bước 4: Vận dụng sự tương ứng để nghiên cứu sâu đối với bài toán thực tế về hàm số mũ và hàm số Lôgarit

- Từ sự tương ứng được thiết lập, giáo viên giúp học sinh tìm tòi, phát hiện mối liên hệ, sự biến thiên, sự kéo theo giữa các đối tượng đối với các bài toán hàm số mũ và hàm số Lôgarit tương tự hay bài toán khái quát hóa.

- Bước này giúp rèn luyện khía cạnh sử dụng sự tương ứng đối với bài toán hàm số mũ và hàm số Lôgarit.

2.7. Cách thức tổ chức dạy học rèn luyện một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm thông qua dạy học các bài toán thực tế hàm số mũ và hàm số Lôgarit ở lớp 11

Bước 1: Lựa chọn bài toán thực tế về hàm số mũ và

hàm số Lôgarit có khả năng rèn luyện được một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm

- Trên thực tế, có nhiều bài toán về hàm số mũ và hàm số Lôgarit chỉ thuần túy là bài toán thực tế không chứa trong nó mối liên hệ, sự tương ứng, sự kéo theo. Vì thế, giáo viên cần phân tích, so sánh để đưa ra bài toán thực tế về hàm số mũ và hàm số Lôgarit có khả năng rèn luyện được một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm. Chẳng hạn giáo viên đưa ra bài toán sau:

Ví dụ (*Bài toán tế bào*): Nếu chúng ta bắt đầu với một tế bào nấm men đơn bào trong điều kiện phát triển thuận lợi, thì trong một giờ nó sẽ phân đôi thành hai “tế bào con” giống hệt nhau. Tiếp theo, sau một giờ nữa, mỗi tế bào con này sẽ phân đôi thành hai tế bào giống hệt nhau [29].

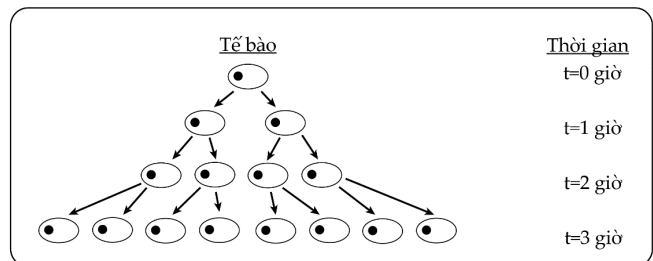
a) Lập công thức biểu diễn số tế bào sau n giờ. Sau đó, tìm số tế bào con giống hệt nhau sau 24 giờ.

b) Khi nào ta sẽ có 1024 “tế bào con” giống hệt tế bào mẹ ban đầu.

- Bước này giúp rèn luyện khía cạnh phát hiện sự tương ứng đối với bài toán hàm số mũ và hàm số Lôgarit.

Bước 2: Xác lập sự tương ứng của bài toán thực tế về hàm số mũ và hàm số Lôgarit

Hình 3 biểu diễn hiện tượng nhân đôi của tế bào nấm men đơn bào.



Hình 3: Quá trình phát triển nhân đôi của tế bào nấm men [29]

Bước 3: Nắm vững sự tương ứng để đưa ra cách thức giải quyết bài toán thực tế về hàm số mũ và hàm số Lôgarit

	Thời gian (giờ)	Tế bào nấm men đơn bào con
Sự tương ứng	0	$1 = 2^0$
	1	$2 = 2^1$
	2	$4 = 2^2$
	3	$8 = 2^3$
	4	$16 = 2^4$
	...	
	t	2^t

- Số lượng tế bào được tính theo lũy thừa cơ số 2. Sau khi lập luận, nhận thấy mối liên hệ giữa thời gian và số lượng tế bào là $N(t) = 2^t$. Đây là công thức chung để tìm số lượng tế bào sau t giờ.

- Giáo viên yêu cầu học sinh nghiên cứu sự tương ứng bằng cách chứng minh số lượng tế bào là $N(t) = 2^t$ bằng quy nạp Toán học như sau:

+ Với $t = 0$ ta có số tế bào là $1 = 2^0$ tế bào con, đúng.

+ Với $t = 1$ ta có số tế bào là $2 = 2^1$ tế bào con, đúng.

+ Giả sử công thức số lượng tế bào con đúng tới $N(n) = 2^n$, ta chứng minh công thức số lượng tế bào con đúng với $N(n) = 2^{n+1}$ con.

Số lượng tế bào con vào thời điểm $n + 1$ giờ chính bằng số lượng tế bào con sau n giờ $\times 2 = 2n \times 2 = 2^{n+1}$. Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $N(t) = 2^t$ (tế bào con).

a) Khi $t = n$ giờ, thay $t = n$ vào công thức vừa tìm ra, ta sẽ có $N(n) = 2^n$.

Khi đó, $t = 24$ ta có $N(24) = 2^{24} = 16777216$.

b) Khi nào ta sẽ có 1024 tế bào con?

Công thức tổng quát tính số lượng tế bào sau t giờ là $N(t) = 2^t$. Ngược lại, chỉ được tìm thời gian để đạt x tế bào khi có hàm số $t = \log_2 x$. Sau khi sử dụng hết những dữ kiện đề cho và lập luận ta có: $N(t) = 1024 = 2^t$ tìm thời gian t , $t = \log_2 1024 = 10$. Sau 10 giờ sẽ có 1024 tế bào con.

Bước này giúp rèn luyện khía cạnh nghiên cứu sự tương ứng đối với bài toán hàm số mũ và hàm số Lôgarit.

Bước 4: Vận dụng sự tương ứng để nghiên cứu sâu

đối với bài toán thực tế về hàm số mũ và hàm số Lôgarit

Dựa vào bài toán vừa giải, ta đưa ra bài toán và lời giải tương tự để nghiên cứu sâu bài toán như sau:

Ví dụ 1: Một tế bào tiến hành phân chia và tạo ra được 256 tế bào mới. Hãy cho biết tế bào đã phân chia bao nhiêu lần?

Rõ ràng, số lần phân chia của tế bào là $n = \log_2 256 = 8$ (lần).

3. Kết luận

Dạy học rèn luyện một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm thông qua các bài toán thực tế hàm số mũ và hàm số Lôgarit ở lớp 11 là cách thức dạy học khá mới mẻ trong giai đoạn hiện nay. Cách thức dạy học này phản ánh một cách trực tiếp và cụ thể những hiện tượng của thế giới khách quan đó là mối liên hệ và sự tương quan giữa các đối tượng thực tế. Nó thể hiện được tư tưởng biện chứng của Toán học hiện đại. Đó là nhìn sự vật, hiện tượng và nghiên cứu các đại lượng trong trạng thái biến đổi, cái này kéo theo cái kia chứ không phải trong trạng thái tĩnh tại, cô lập, tách rời nhau. Tư duy hàm đó là sự tương quan phụ thuộc lẫn nhau giữa các đối tượng. Bài viết tập trung vào việc đưa ra một số quan điểm của tư duy, tư duy Toán học, tư duy hàm, một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm, quan niệm, quy trình cũng như cách thức tổ chức rèn luyện một số khía cạnh đặc trưng của tư duy hàm thông qua dạy học các bài toán thực tế hàm số mũ và hàm số Lôgarit ở lớp 11.

Tài liệu tham khảo

- [1] L. D. Phát, (2008), *Bồi dưỡng một số nét đặc trưng của tư duy hàm cho học sinh Trung học cơ sở thông qua việc vận dụng quan điểm hoạt động vào dạy học môn Toán*, Vinh.
- [2] Bộ Giáo dục và Đào tạo, (2018), *Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán*, tr.123.
- [3] R. Martins, F. Viseu, and H. Rocha, (2023), *Functional Thinking: A Study with 10th-Grade Students*, Educ. Sci., vol. 13, no. 4, doi: 10.3390/educsci13040335.
- [4] M. Slavičková and M. Vargová, (2018), *Functional Thinking of Future Mathematics Teachers, ICERI2018 Proc.*, vol.1, no. September, pp.2028–2036, doi: 10.21125/iceri.2018.1439.
- [5] S. Yuniati, T. Nusantara, I. M. Sulandra, and Suparjono, (2022), *Investigating Functional Thinking Processes that Impact on Function Composition Problems in Indonesia*, Acta Sci., vol. 24, no. 5, pp.84–118, doi: 10.17648/acta.scientiae.6969.
- [6] J. Pang, L. Leena, and J. Sunwoo, (2022), *Task Development to Measure Functional Thinking: Focusing on Third Graders' Understanding*, Korean Soc. Educ. Stud. Math. - J. Educ. Res. Math., vol. 32, no.3, pp.351–372, doi: 10.29275/jerm.2022.32.3.351.
- [7] G. Abdul and S. Imran, (June 2023), *Gender Wise Comparative Study Of Students Functional Thinking In Mathematics*.
- [8] A. C. Stephens et al., (2017), *A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking*, Math. Think. Learn, vol.19, no.3, pp.143–166, doi: 10.1080/10986065.2017.1328636.
- [9] N. T. P. Thảo, (7/2021), *Một số biện pháp phát triển tư duy hàm thông qua dạy học nội dung phương trình, bất phương trình lớp 8*, Tạp chí Khoa học - Trường Đại học Hải phòng, vol. 47, tr.26-35.
- [10] N. T. Phong, (5/2016), *Phát triển tư duy hàm cho học sinh Trung học cơ sở thông qua dạy học giải phương trình*, Tạp chí Giáo dục, số đặc biệt, tr.206–208.
- [11] N. L. Sung, (6/2011), *Phát triển tư duy hàm cho học sinh thông qua dạy học chương "Động học chất điểm" (Vật lí 10)*, Tạp chí Giáo dục, vol. 264, kì 2, tr.4–6.
- [12] Nguyễn Thị Hà, (2019), *Một số vấn đề tư duy hàm trong dạy học toán*, Tạp chí Kinh tế Châu Á - Thái Bình Dương.
- [13] J. Hwang, (September, 2023), *Exploring Opportunities for Mathematical Modeling in Korean High School Exploring Opportunities for Mathematical Modeling in Korean High School Textbooks: An Analysis of Exponential and Logarithmic Function Tasks*, doi: 10.7468/jksmed.2023.26.3.253.
- [14] B. P. Uyen, D. H. Tong, and L. T. N. Yen, (2020), *A case study of teaching real-world problems related to exponential and logarithmic equations to develop*

- students' problem-solving competency*, *Univers. J. Educ. Res.*, vol. 8, no. 11B, pp. 6152–6165, doi: 10.13189/ujer.2020.082252.
- [15] N. G. Nguyen, H. T. Pham, and T. N. T. Nguyen, (2021), *Fostering Problem-based Learning Competence through Teaching the Generalization of Practical Problems on the Topic of Exponential and Logarithmic Functions*, *Univers. J. Educ. Res.*, vol.9, no.3, pp.423–440, doi: 10.13189/ujer.2021.090302.
- [16] N. G. Nguyen and T. N. T. Nguyen, (2021), *Training and Developing the Ability to Predict and Solve Problems through the Teaching of Finding and Correcting Mistakes of Real Problems in Vietnam*, *Univers. J. Educ. Res.*, vol. 9, no. 5, pp.1072–1082, doi: 10.13189/ujer.2021.090520.
- [17] T. Trung and C. T. H. Nga, (2019), *Tổ chức dạy học dự án chủ đề “Cấp số cộng, cấp số nhân” gắn với thực tiễn cho học sinh lớp 11 Trung học phổ thông*, *Tạp chí Giáo dục*, Số đặc biệt, Kì 3, tr.199–202.
- [18] V. N. Hòa and N. T. Hưng, (2023), *Khắc phục một số khó khăn khi dạy học các bài toán thực tế trong dạy học môn Toán lớp 10*, *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, tập 19, số S2.
- [19] Đ. T. Hoa, (2019), *Xây dựng bài toán thực tiễn trong dạy học chủ đề hàm số mũ*, *Tạp chí Giáo dục*, số 452, tr.48–52.
- [20] P. T. K. Ngân, (1997), *Tâm lí học đại cương*, NXB Khoa học Xã hội.
- [21] Crugliac, (1976), *Phát triển tư duy học sinh*, NXB Giáo dục.
- [22] N. H. Long, (2009), *Lí luận dạy học tâm lí học*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
- [23] P. M. Hạc, (1997), *Tâm lí học*, NXB Giáo dục.
- [24] Nguyễn Thanh Hưng - Ngô Tùng Nhân, (4/2019), *Rèn luyện thao tác tư duy cho học sinh trong dạy học chương “Tứ giác” (Toán 8) ở trường trung học cơ sở*, *Tạp chí Giáo dục*, số đặc biệt, tr.184–187.
- [25] N. Hashemi, M. S. Abu, H. Kashefi, M. Mokhtar, and K. Rahimi, (2015), *Designing learning strategy to improve undergraduate students' problem solving in derivatives and integrals: A conceptual framework*, *Eurasia J. Math. Sci. Technol. Educ.*, vol.11, no.2, pp.227–238, doi: 10.12973/eurasia.2015.1318a.
- [26] K. Frey, U. Sproesser, and M. Veldhuis, (2022), *What is functional thinking? Theoretical considerations and first results of an international interview study* *What is functional thinking? Theoretical considerations and first results of a*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03744607>.
- [27] M. Licht and J. Roth, (2018), *How to Foster Functional Thinking in Learning Environments Using Computer-Based Simulations or Real Materials*, *J. STEM Educ. Res.*, vol.1, no.1–2, pp.148–172, doi: 10.1007/s41979-018-0007-1.
- [28] T. T. P. Thảo, (2015), *Năng lực biên soạn, sử dụng học liệu điện tử trong dạy học ở trường phổ thông*, *Tạp chí Khoa học*, Đại học Huế, vol.60, no.8A, pp.79–86.
- [29] M. M. Collingwood, D. H., David Prince, K., Conroy, (2016), *Precalculus*, A. T. Still University.

PRACTISING SOME CHARACTERISTIC ASPECTS OF FUNCTIONAL THINKING THROUGH TEACHING REAL PROBLEMS OF EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS IN GRADE 11

Nguyen Ngoc Giang¹, Nguyen Ai Quoc²,
Pham Huyen Trang^{*3}, Nguyen Minh Hai⁴

¹ Email: giangnn@hub.edu.vn
Ho Chi Minh University of Banking
36 Ton That Dam street, District 1,
Ho Chi Minh City, Vietnam

² Email: naquoc@sgu.edu.vn
Sai Gon University
273 An Duong Vuong street, District 5,
Ho Chi Minh City, Vietnam

* Corresponding author
³ Email: phamhuyentrang@hpu2.edu.vn
Hanoi Pedagogical University 2
32 Nguyen Van Linh street, Phuc Yen city,
Vinh Phuc province, Vietnam

⁴ Email: nguyenminhhai.thnk.5a@gmail.com
Vocational Education Center - Continuing Education District 12
2 Bis, To Ky street, Quarter 3, District 12,
Ho Chi Minh City, Vietnam

ABSTRACT: *The concept of a function, with a particular case being the concept of a mathematical function, plays a crucial role, if not a central role, in the upper secondary school Mathematics curriculum and specifically in the 11th-grade Mathematics curriculum. The functional thinking associated with functions closely relates to the concept of mathematical functions and needs to be cultivated in students. It refers to changes and relationships among objects. Textbooks often emphasize real-world problem scenarios to illustrate the concept of functions in particular and functional thinking in general. However, applying functional thinking to teaching real-world problems involving exponential and logarithmic functions is also a new undertaking. Therefore, our paper explores perspectives on thinking, mathematical thinking, and functional thinking. Additionally, the paper presents viewpoints, processes, and teaching methods to develop certain aspects of functional thinking through instructing real-world problems involving exponential and logarithmic functions in grade 11.*

KEYWORDS: Thinking, mathematical thinking, functional thinking, real-world problems, exponential and logarithmic functions.