

Biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra nhằm phát triển năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán cho học sinh

Phạm Huyền Trang*¹, Nguyễn Ngọc Giang²,
Mai Vũ Linh Đan³

* Tác giả liên hệ

¹ Email: phamhuyentrang@hpu2.edu.vn

Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

32 Nguyễn Văn Linh, Xuân Hòa,
thành phố Phúc Yên, tỉnh Vĩnh Phúc, Việt Nam

² Email: giangnn@hub.edu.vn

Trường Đại học Ngân hàng Thành phố Hồ Chí Minh,

36 Tôn Thất Đạm, phường Nguyễn Thái Bình,
Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

³ Email: linhdan1775@gmail.com

Trường Trung học phổ thông Dương Văn Thi

161 Lê Xuân Oai, Tầng Nhon Phú A, Quận 9,
thành phố Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh,
Việt Nam

TÓM TẮT: Ngày nay, với sự chuyển mình một cách mạnh mẽ của tất cả các thành phần từ kinh tế cho đến khoa học, xã hội thì lĩnh vực giáo dục cũng có những thay đổi hết sức đáng kể. Thay vì tập trung vào dạy học cho học sinh những kiến thức mang tính lí thuyết, hàn lâm kinh viện như trước đây thì ngày nay việc dạy học tập trung vào phát triển năng lực và phẩm chất cho học sinh. Theo Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018, năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán là một trong năm năng lực thành phần của năng lực Toán học cần được hình thành và phát triển cho học sinh. Ở cấp Trung học phổ thông, nội dung biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là nội dung được chú trọng. Nội dung này thể hiện tiềm năng phát triển năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán (phần mềm GeoGebra). Trong bài viết này, nhóm tác giả đưa ra các quan điểm về năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán, các biểu hiện cũng như quy trình dạy học bồi dưỡng năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán (phần mềm GeoGebra) thông qua dạy học biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cũng như ví dụ minh họa cho dạy học theo quy trình này.

TỪ KHÓA: Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán, phần mềm GeoGebra, miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, biểu diễn miền nghiệm.

→ Nhận bài 01/4/2023 → Nhận bài đã chỉnh sửa 03/6/2023 → Duyệt đăng 15/8/2023.

DOI: <https://doi.org/10.15625/2615-8957/12310807>

1. Đặt vấn đề

Chương trình Đánh giá học sinh quốc tế năm 2021 (Programme for International Student Assessment - PISA) cho rằng: “Năng lực sử dụng công cụ phương tiện học Toán là năng lực sử dụng những loại thiết bị vật lí, kĩ thuật số, phần mềm và thiết bị tính toán. Các công cụ Toán học trên máy tính đang được sử dụng phổ biến ở nhiều cơ quan của thế kỉ XXI và sẽ ngày càng phổ biến hơn cả ở cơ quan làm việc nói riêng và xã hội nói chung” [1]. Theo Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018: “Nội dung môn Toán thường mang tính logic, trừu tượng, khái quát. Do đó, để hiểu và học được Toán, chương trình Toán ở trường phổ thông cần bảo đảm sự cân đối giữa “học” kiến thức và “vận dụng” kiến thức vào giải quyết vấn đề cụ thể. Trong quá trình học và áp dụng Toán học, học sinh luôn có cơ hội sử dụng các phương tiện công nghệ, thiết bị dạy học hiện đại, đặc biệt là máy tính điện tử và máy tính cầm tay hỗ

trợ quá trình biểu diễn, tìm tòi, khám phá kiến thức, giải quyết vấn đề Toán học” [2]. Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018 cho rằng, cần thay đổi từ việc dạy học tập trung vào truyền thụ nội dung sang dạy học phát triển năng lực, phẩm chất người học. Mục tiêu của dạy học môn Toán chính là: “Hình thành và phát triển năng lực Toán học bao gồm các thành tố cốt lõi sau: năng lực tư duy và lập luận Toán học; năng lực mô hình hoá Toán học; năng lực giải quyết vấn đề Toán học; năng lực giao tiếp Toán học; năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán” [2]. Như vậy, năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán là năng lực cần hình thành và phát triển cho học sinh.

Phần mềm GeoGebra là phần mềm Toán học hỗ trợ học sinh khám phá, hình thành thực hành, luyện tập các kiến thức Toán học. Phần mềm GeoGebra được xem là một công cụ, phương tiện học toán bởi nó thỏa mãn hai tiêu chí về Danh mục thiết bị dạy học môn

Toán cấp Trung học phổ thông ban hành kèm theo Thông tư 39/2021/TT-BGDĐT Danh mục thiết bị dạy học tối thiểu cấp Trung học phổ thông, ngày 30 tháng 12 năm 2021. Thứ nhất, nó đảm bảo biểu thị được điểm, vectơ, các phép toán vectơ trong hệ trục tọa độ Oxy ; vẽ đường thẳng, đường tròn, các đường conic trên mặt phẳng tọa độ; tạo được sự thay đổi hình dạng của các hình khi thay đổi các yếu tố trong phương trình xác định chúng; thiết kế đồ họa liên quan đến đường tròn và các đường conic; vẽ đường thẳng, mặt phẳng, giao điểm, giao tuyến, tạo hình trong không gian, xác định hình biểu diễn; tạo mô hình khối tròn xoay trong một số bài toán ứng dụng tích phân xác định; vẽ đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu trong hệ trục tọa độ $Oxyz$; xem xét sự thay đổi hình dạng khi thay đổi các yếu tố trong phương trình của chúng; Thứ hai, phần mềm GeoGebra là phần mềm mã nguồn mở không vi phạm bản quyền.

Một số ứng dụng của phần mềm GeoGebra đã được đề cập qua các nghiên cứu như “Capabilities and Contributions of the Dynamic Math Software, GeoGebra” của Awgichew Zergaw Bahir và cộng sự (2020) [3]; “Teaching and Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra” của Hohenwarter và cộng sự (2008) [4]; “Discovery Teaching about Plane Geometric Extreme Problems with the Help of Geogebra Software at Secondary School in Vietnam” của Nguyễn Ngọc Giang và cộng sự (2021) [5]; “Sử dụng GeoGebra để củng cố lý thuyết hình học” của Vũ Thị Phương (2021) [6]. Các nghiên cứu đưa ra những ứng dụng của GeoGebra trong dạy học Toán như trực quan hóa, sử dụng công cụ tính toán, sử dụng trong chứng minh hình học, trong các phép biến hình hay trong hình học không gian; ứng dụng của GeoGebra trong dạy học phép tính vi tích phân như tiếp tuyến của đường cong, tạo vết hàm tiếp tuyến của $\sin(x)$, đạo hàm, nghiệm và các điểm cực trị, biểu diễn động của xấp xỉ Taylor, các tổng dưới và tổng trên để tính tích phân, vết của hàm diện tích; Ứng dụng GeoGebra trong dạy học cực trị hình học phẳng; Sử dụng GeoGebra để củng cố lý thuyết bao gồm bốn bước. Thứ nhất, đưa ra bài toán củng cố là bài toán điển hình, không quá khó và có nội dung phù hợp; Thứ hai, học sinh giải bài toán theo phương pháp lý thuyết vừa học; Thứ ba, giáo viên mô tả với phần mềm GeoGebra; Cuối cùng là học sinh so sánh, đối chiếu với kết quả.

Vai trò của phần mềm GeoGebra đã được khẳng định qua nghiên cứu “Learning Media on Mathematical Education based on Augmented Reality”. Nghiên cứu chỉ ra rằng, GeoGebra là công cụ công nghệ thực tế ảo

tăng cường giúp giải quyết các bài toán thực tiễn cũng như là công cụ tốt trong đánh giá học tập [7].

Về tính hiệu quả của việc sử dụng phần mềm GeoGebra đã được khẳng định qua các nghiên cứu: “Some of the Potential Affordances, Challenges and Limitations of Using GeoGebra in Mathematics Education” của Wassie & Zergaw (2019) [8]; “Dạy học Toán theo định hướng phát triển tư duy đồ thị dưới sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra” của Lương Việt Hưng (2018) [9]; “Khai thác phần mềm GeoGebra trong một số tình huống dạy học môn Toán 9” của Nguyễn Thị Hương & Lê Tuấn Anh (2018) [10]. Các nghiên cứu khẳng định rằng, GeoGebra dễ hình dung hơn trong giấy hay bảng, thúc đẩy học sinh tham gia vào bài học, biểu diễn các hàm phức một cách dễ dàng. GeoGebra giúp cải thiện thành tích học tập và cung cấp môi trường để phát triển các phong cách học tập khác nhau; GeoGebra hỗ trợ tốt trong giải các bài toán trắc nghiệm thi trung học phổ thông quốc gia; Ưu điểm của GeoGebra trong là tạo được vết, kéo, rê các đối tượng hình học để phục vụ cho việc dạy học; Có thể khai thác GeoGebra trong một số tình huống dạy học Toán 9 như tình huống dạy học khái niệm, tình huống dạy học định lý Toán học, tình huống dạy học giải bài tập toán. Kết luận rút ra là, các tình huống dạy học với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra giúp học sinh nắm vững kiến thức hơn. Học sinh biết cách tìm tòi lời giải và khai thác lời giải của bài toán.

Yêu cầu cần đạt đối với chủ đề bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán (2018) là nhận biết được bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn; Biểu diễn được miền nghiệm của bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ; Vận dụng được kiến thức về bất phương trình, hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vào giải quyết bài toán thực tiễn (Ví dụ, bài toán tìm cực trị của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác,...). Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là kiến thức cơ bản trong các lĩnh vực kỹ thuật, khoa học và kinh doanh. Chúng ta có thể áp dụng hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số bài toán thực tế, chẳng hạn như bài toán về sản xuất hoặc tiêu thụ. Nếu như trong sản xuất hoặc tiêu thụ có hai yếu tố ảnh hưởng đến kết quả (Ví dụ, số lượng lao động và số lượng nguyên liệu), thì việc giải quyết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sẽ giúp ta tìm ra các giá trị của hai yếu tố này để đạt được kết quả mong muốn.

Về việc vận dụng phương pháp dạy học tích cực trong dạy học hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đã được khẳng định qua nghiên cứu “Tổ chức dạy học theo dự

án trong dạy học môn Toán cho học sinh trung học phổ thông” của Trần Việt Cường và cộng sự (2014) [11]. Nghiên cứu đã đề xuất xây dựng kế hoạch triển khai dự án học tập, kiểm tra, hướng dẫn hỗ trợ học sinh thực hiện dự án và lập hồ sơ đánh giá qua các bài toán hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Về việc xây dựng bài toán kinh tế trong dạy học chủ đề hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đã được khẳng định qua nghiên cứu “Một số biện pháp xây dựng bài toán kinh tế trong dạy học chủ đề “Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn” (Toán 10)” của Phạm Thị Hồng Hạnh và cộng sự (2023) [12]. Nghiên cứu đã đưa ra bốn biện pháp. Đó là, chọn lọc bài toán kinh tế có mô hình Toán học là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn từ các tài liệu sẵn có; Thay đổi một số dữ liệu của một bài toán kinh tế có mô hình Toán học là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để tạo thành một bài toán kinh tế mới và thêm các yếu tố kinh tế vào các bài toán hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn (bài toán thuần túy Toán học). Đối với từng biện pháp, nghiên cứu đã đưa ra được mục đích, cách thức thực hiện và ví dụ minh họa. Kết luận được rút ra là, đối với học sinh đạt và chưa đạt, cần sử dụng các bài toán ở mức độ vận dụng thấp, tức là bài toán vận dụng các thao tác tính toán đơn giản. Đối với học sinh khá, giỏi, giáo viên có thể lựa chọn những bài toán kinh tế ở mức độ khó hơn, đòi hỏi sự vận dụng tổng hợp nhiều công thức, sử dụng thao tác tính toán phức tạp. Bên cạnh đó, giáo viên cần chú ý tính vừa sức và hứng thú học tập của học sinh khi tổ chức dạy học các bài toán kinh tế.

Mặc dù đã có nhiều nghiên cứu về việc sử dụng phần mềm GeoGebra trong dạy học và những hiệu quả đem lại cũng như hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn nhưng chưa có nghiên cứu nào về các đối tượng này theo hướng phát triển năng lực. Vì thế, bài viết tập trung nghiên cứu về chủ đề biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra nhằm phát triển năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán cho học sinh.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán

Hiện nay, quan điểm về năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán có nhiều cách tiếp cận khác nhau. “Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán là khả năng sử dụng công cụ và hỗ trợ bao gồm các chương trình số học, chương trình đồ họa, đại số máy tính, bảng tính. Ngoài ra, còn có bảng, thanh trượt, bàn tính, thước kẻ, compa, thước đo góc, logarit, bảng phân

phối chuẩn... Vì mỗi loại công cụ liên quan đến một hoặc nhiều loại biểu diễn Toán học, năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán có liên quan chặt chẽ với năng lực biểu diễn Toán học. Hơn nữa, vì việc sử dụng một số công cụ, phương tiện thường liên quan đến việc tuân theo các “quy tắc” nhất định và dựa trên các giả định Toán học cụ thể nên năng lực sử dụng các công cụ, phương tiện học Toán còn liên quan đến năng lực sử dụng kí hiệu và hình thức” [13].

Theo Mogen Niss trong The Danish KOM project, năng lực sử dụng công cụ phương tiện học Toán bao gồm hai thành phần. Thứ nhất, *nhận biết sự tồn tại, các tính chất* của các công cụ và sự hỗ trợ đối với các hoạt động Toán học, nhận biết phạm vi và giới hạn của các công cụ và sự hỗ trợ. Thứ hai, *biết sử dụng* công cụ và sự hỗ trợ” [14].

Chúng tôi đồng ý với quan điểm của Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018 về các thành tố của năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán gồm:

- Nhận biết được tên gọi, tác dụng, quy cách sử dụng, cách thức bảo quản các đồ dùng, phương tiện trực quan thông thường, phương tiện khoa học công nghệ (đặc biệt là phương tiện sử dụng công nghệ thông tin), phục vụ cho việc học Toán.
- Sử dụng được các công cụ, phương tiện học Toán, đặc biệt là phương tiện khoa học công nghệ để tìm tòi, khám phá và giải quyết vấn đề Toán học (phù hợp với đặc điểm nhận thức lứa tuổi).
- Nhận biết được các ưu điểm, hạn chế của những công cụ, phương tiện hỗ trợ để có cách sử dụng hợp lí [2].

2.2. Các thành tố của năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán (phần mềm GeoGebra) trong biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Trên cơ sở các thành tố năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán trong Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018, chúng tôi đưa ra ba thành tố của năng lực sử dụng công cụ phương tiện học Toán (phần mềm GeoGebra) trong dạy học biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn như sau:

- Nhận biết được tên gọi, tác dụng, quy cách sử dụng phần mềm GeoGebra trong dựng hình, vẽ đồ thị biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Sử dụng được phần mềm GeoGebra trong việc tìm tòi, khám phá và giải toán biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Chỉ ra ưu điểm của phần mềm GeoGebra trong dạy học biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

2.3. Quan niệm về dạy học biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra nhằm phát triển năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán cho học sinh

Trên cơ sở các quan điểm về năng lực sử dụng công cụ học Toán; các thành tố của năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán (phần mềm GeoGebra), chúng tôi cho rằng, dạy học biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra nhằm phát triển năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán cho học sinh là cách thức dạy học, trong đó giáo viên yêu cầu và hướng dẫn học sinh sử dụng ô nhập lệnh, các nút lệnh của phần mềm GeoGebra để biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn theo đúng quy định biểu diễn miền nghiệm của sách giáo khoa. Trên cơ sở quan sát miền nghiệm của của phần mềm GeoGebra, học sinh sử dụng thanh trượt để tìm ra giá trị lớn nhất hay bé nhất của hàm mục tiêu. Từ đó, rút ra được ưu điểm của phần mềm GeoGebra trong dạy học giải Toán hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

2.4. Quy trình giải Toán biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra nhằm phát triển năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán cho học sinh

Trên cơ sở các thành tố của năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán (phần mềm GeoGebra) trong dạy học biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, chúng tôi đề xuất quy trình giải Toán biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra nhằm phát triển năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán cho học sinh như sau:

Bước 1: Yêu cầu học sinh sử dụng phần mềm GeoGebra nhập vào ô nhập lệnh các bất phương trình bậc nhất hai ẩn của bài toán (xem Hình 1)

Học sinh dưới sự hướng dẫn của giáo viên nhập các bất phương trình vào ô nhập lệnh của GeoGebra. Có bốn dạng bất phương trình là:

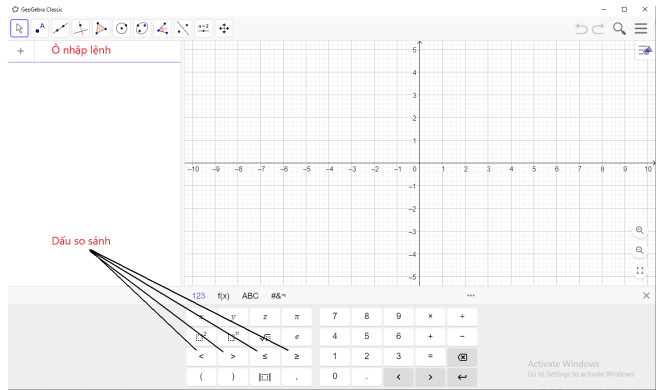
$$ax + by + c < 0; \quad ax + by + c > 0;$$

$$ax + by + c \leq 0; \quad ax + by + c \geq 0.$$

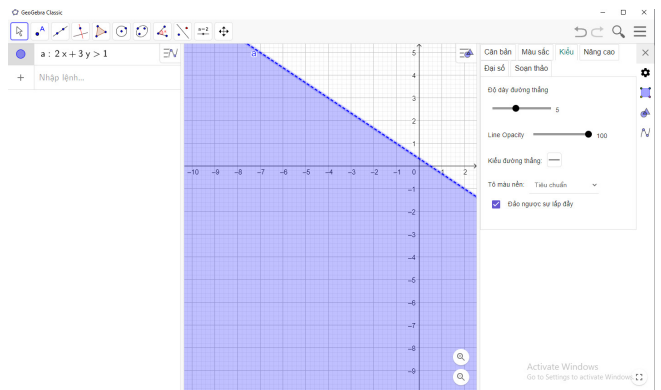
Bước này góp phần phát triển thành tố 1 và thành tố 2 của năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán.

Bước 2: Yêu cầu học sinh sử dụng phần mềm GeoGebra biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn (xem Hình 2)

Vì miền nghiệm trong phần mềm GeoGebra thường ngược với cách biểu diễn miền nghiệm trong sách giáo khoa cho nên giáo viên cần hướng dẫn học sinh đảo ngược lại cách biểu diễn bằng cách bấm chuột phải vào các bất phương trình ở ô nhập lệnh đã nhập xong → Kiểu → Đảo ngược sự lấp đầy. Lúc này, ta sẽ được miền



Hình 1: Giao diện ô nhập lệnh (Nguồn: Các tác giả, 2023)



Hình 2: Đảo ngược biểu diễn miền nghiệm trên GeoGebra (Nguồn: Các tác giả, 2023)

nh nghiệm như quy ước trong sách giáo khoa. Chẳng hạn, ta có miền nghiệm của bất phương trình $2x + 3y > 1$ như sau:

Bước này góp phần phát triển thành tố 1 và thành tố 2 của năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán.

Bước 3: Học sinh rút ra kết luận bài toán từ quan sát miền nghiệm trên phần mềm GeoGebra

Giáo viên yêu cầu học sinh quan sát miền nghiệm biểu diễn trên công cụ, phương tiện học Toán (phần mềm GeoGebra) để rút ra miền nghiệm của bài Toán cần tìm. Miền nghiệm chính là miền không tô đậm trên GeoGebra.

Bước này góp phần phát triển thành tố 2 của năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán.

Bước 4: Phát triển bài toán nhờ sử dụng phần mềm GeoGebra

Giáo viên đưa ra bài toán thực tế của bài toán được cho bởi hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Sau đó, giáo viên yêu cầu học sinh dựa vào kiến thức được học để giải bài toán bằng phương pháp Toán học. Tiếp theo, giáo viên biểu diễn miền nghiệm và phương trình hàm mục tiêu trên GeoGebra có sử dụng công cụ thanh trượt. Di chuyển thanh trượt đến các giá trị khác nhau sẽ tìm được giá trị lớn nhất hay bé nhất của hàm mục

tiêu. Từ đó, rút ra kết luận cho kết quả phát triển.

Bước này góp phần phát triển cả ba thành tố của năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán.

2.5. Ví dụ minh họa việc tổ chức dạy học giải một số bài toán biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra nhằm phát triển năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán

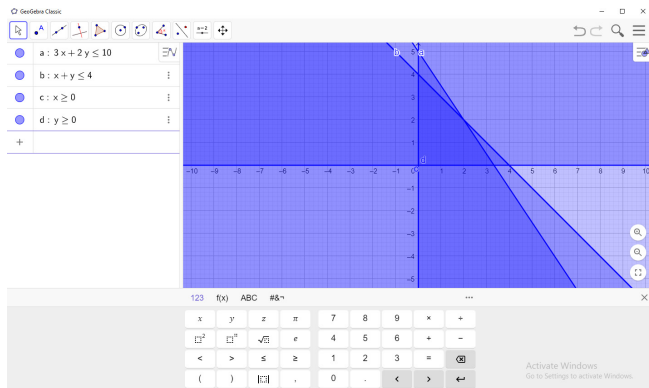
Bài toán 1: Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 10 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bước 1: Yêu cầu học sinh sử dụng phần mềm Geogebra nhập vào ô nhập lệnh các bất phương trình bậc nhất hai ẩn của bài toán

Học sinh sử dụng ô nhập lệnh của công cụ, phương tiện học toán (phần mềm GeoGebra) nhập vào các bất phương trình (xem Hình 3)

$$3x + 2y \leq 10; x + y \leq 4; x \geq 0; y \geq 0.$$



Hình 3: Nhập các bất phương trình (Nguồn: Các tác giả, 2023)

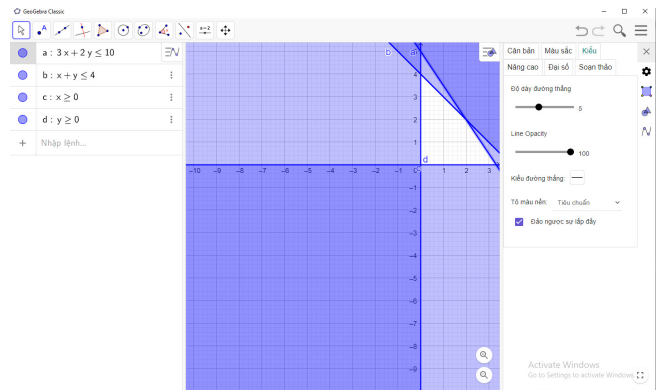
Bước 2: Yêu cầu học sinh sử dụng phần mềm GeoGebra biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Vì trên phần mềm GeoGebra, miền nghiệm của các bất phương trình là miền tô đậm nên ta phải đảo ngược lại miền nghiệm. Giáo viên yêu cầu học sinh vào bất phương trình, chẳng hạn $a: 3x + 2y \leq 10 \rightarrow$ Kiểu \rightarrow Đảo ngược sự lấp đầy. Làm tương tự với ba bất phương trình còn lại (xem Hình 4).

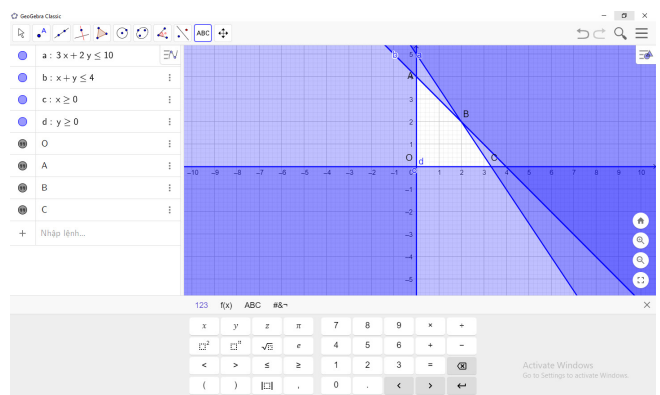
Bước 3: Học sinh rút ra kết luận bài toán từ quan sát miền nghiệm trên phần mềm GeoGebra

Miền không tô đậm (miền tứ giác OABC, bao gồm cả các cạnh) là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho (xem Hình 5).

Bước 4: Phát triển bài toán nhờ sử dụng phần mềm GeoGebra



Hình 4: Biểu diễn miền nghiệm trên GeoGebra (Nguồn: Các tác giả, 2023)



Hình 5. Kết luận miền nghiệm (Nguồn: Các tác giả, 2023)

Từ bài toán ban đầu, giáo viên đề xuất ra bài toán thực tế sau:

Bài toán 2:

Bác Ba dự định trồng ngô và lạc trên một mảnh đất có diện tích 4 ha. Vì sử dụng máy móc nên nếu trồng một ha ngô thì cần 3 ngày công và thu được 100 triệu đồng; trồng 1 ha lạc thì cần 2 ngày công và thu được 65 triệu đồng. Bác Ba cần trồng bao nhiêu ha cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền nhất? Biết rằng, bác Ba chỉ có thể sử dụng không quá 10 ngày công cho việc trồng ngô và lạc.

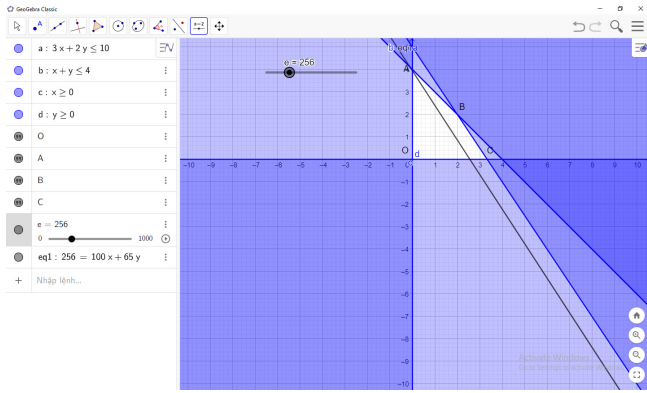
Gọi x là số ha đất trồng ngô và y là số ha đất trồng lạc. Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

- Hiển nhiên, $x \geq 0, y \geq 0$.
- Diện tích canh tác không vượt quá 4 ha nên $x + y \leq 4$.
- Số ngày công sử dụng không vượt quá 10 nên $3x + 2y \leq 10$.

Từ đó, ta có hệ bất phương trình mô tả các điều kiện

$$\text{ràng buộc: } \begin{cases} 3x + 2y \leq 10 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình này



Hình 6: Sử dụng GeoGebra tìm giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu (Nguồn: Các tác giả, 2023)

trên hệ trục tọa độ Oxy ta được miền tứ giác OABC (xem Hình 5).

Tọa độ của các đỉnh của tứ giác là:

$$O(0; 0); A(0; 4); B(2; 2); C\left(\frac{10}{3}; 0\right).$$

Gọi F là số tiền (đơn vị triệu đồng) bác Ba thu được, ta có $F = 100x + 65y$.

Ta phải tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình sao cho F đạt giá trị lớn nhất, nghĩa là tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 100x + 65y$ trên miền tứ giác OABC.

Tính các giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của đa giác, ta có:

$$\text{Tại } O(0; 0): F = 100 \cdot 0 + 65 \cdot 0 = 0;$$

$$\text{Tại } A(0; 4): F = 100 \cdot 0 + 65 \cdot 4 = 260;$$

$$\text{Tại } B(2; 2): F = 100 \cdot 2 + 65 \cdot 2 = 330;$$

$$\text{Tại } C\left(\frac{10}{3}; 0\right): F = 100 \cdot \frac{10}{3} + 65 \cdot 0 = \frac{1000}{3}.$$

F đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1000}{3}$ tại $C\left(\frac{10}{3}; 0\right)$.

Vậy, để thu được nhiều tiền nhất, bác Ba cần trồng 4 ha ngô và 0 ha lạc.

Sau khi giải bài toán bằng phương pháp Toán học, giáo viên đưa ra nhận xét: ta có thể giải bài toán bằng phương pháp sử dụng công cụ, phương tiện học Toán (phần mềm GeoGebra). Chúng ta sử dụng *Thanh trượt e* với giá trị cực tiểu là 0, cực đại là 1000. Nhập vào phương trình $e = 100x + 65y$, sau đó di chuyển thanh trượt đến các giá trị khác nhau, ta thấy F đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1000}{3}$ tại $C\left(\frac{10}{3}; 0\right)$ (xem Hình 6).

3. Kết luận

Sử dụng phần mềm GeoGebra trong quá trình dạy học giúp học sinh giải quyết vấn đề một cách nhanh chóng. Thông qua việc sử dụng phần mềm GeoGebra trong biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán của học sinh được phát triển. Cụ thể, học sinh nhập được các bất phương trình vào ô nhập lệnh, sử dụng thành thạo các nút lệnh như đường thẳng, đa giác, thanh trượt... trên phần mềm GeoGebra. Học sinh đọc được các kết quả hiển thị cũng như các kết luận trên phần mềm GeoGebra. Thêm vào đó, học sinh sử dụng phần mềm GeoGebra trợ giúp trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu trong một số bài toán thực tiễn. Qua đó, học sinh rút ra những ưu điểm của việc sử dụng phần mềm GeoGebra trong giải Toán so với các phương pháp giải Toán thông thường.

Tài liệu tham khảo

- [1] PISA 2021 Mathematics Framework (Second draft) For Official Use, (2021), Retrieved from <https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa-2021-mathematics-framework-draft.pdf>.
- [2] Bộ Giáo dục và Đào tạo, (2018), *Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán*.
- [3] Awgichew Zergaw Bahir, G., Abera Wassie, Y., & Awgichew Zergaw, G, (2020), *Capabilities and Contributions of the Dynamic Math Software, GeoGebra-a Review*, Capabilities and Contributions of the Dynamic Math Software, GeoGebra-a Review Article in North American Journal of Psychology, 7(1), <https://www.geogebra.org>.
- [4] Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z, (2008), *Teaching and calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra*, Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/228869636_Teaching_and_Learning_Calculus_with_Free_Dynamic_Mathematics_Software_GeoGebra.
- [5] Nguyễn Ngọc Giang - Bùi Thị Khánh Linh, (2021), *Discovery Teaching about Plane Geometric Extreme Problems with the Help of Geogebra Software at Secondary School in Vietnam*, Universal Journal of Educational Research, 9(6), 1340–1352, <https://doi.org/10.13189/ujer.2021.090624>.
- [6] Vũ Thị Phương, (2021), *Sử dụng GeoGebra để củng cố lý thuyết hình học*, Ho Chi Minh city University of Education Journal of Science, 18(5), 817–826.
- [7] Kounlaxay, K., Shim, Y., Kang, S. J., Kwak, H. Y., & Kim, S. K, (2021), *Learning media on mathematical education based on augmented reality*, KSII Transactions on Internet and Information Systems, 15(3), 1015–1029, <https://doi.org/10.3837/tiis.2021.03.011>.
- [8] Wassie, Y.A - Zergaw, G.A, (2019), *Some of the potential affordances, challenges and limitations of using GeoGebra in mathematics education*, Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15(8), <https://doi.org/10.29333/ejmste/108436>.

- [9] Lương Việt Hưng, (2018), *Dạy học toán theo định hướng phát triển tư duy đồ thị dưới sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra*, Journal of Science, 15(10), 159–168, <http://tckh.hcmue.edu.vn>.
- [10] Nguyễn Thị Hương - Lê Tuấn Anh, (2018), *Khai thác phần mềm GeoGebra trong một số tình huống dạy học môn Toán lớp 9*, Tạp chí Giáo dục, số 114, 163–167.
- [11] Trần Việt Cường, Nguyễn Ngọc Trang, Nguyễn Phúc Bình, (2014), *Tổ chức dạy học theo dự án trong dạy học môn Toán cho học sinh Trung học phổ thông*, Tạp chí Giáo dục, số 325, kì 1-1/2014, tr. 44-46, 53.
- [12] Phạm Thị Hồng Hạnh, Đinh Mai Phương, Nguyễn Thu Phương, Nguyễn Đình Việt, (2023), *Một số biện pháp xây dựng bài toán kinh tế trong dạy học chủ đề “Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn” (Toán 10)*, Tạp chí Giáo dục, 23(6), 7-12.
- [13] Jankvist, U. T., & Misfeldt, M, (2018), *The KOM framework's aids and tools competency in relation to digital technologies-a networking of theories perspective*, Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/330501168>.
- [14] Niss, M, (2002), *Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish Kom Project*.

REPRESENTING THE SOLUTION SET OF THE SYSTEM OF TWO VARIABLES LINEAR EQUATIONS BY USING GEOGEBRA SOFTWARE FOR DEVELOPING STUDENTS' COMPETENCE TO USE MATHEMATICS TOOLS AND MEANS

Pham Huyen Trang*¹, Nguyen Ngoc Giang²,
Mai Vu Linh Dan³

* Corresponding author

¹ Email: phamhuyentrang@hpu2.edu.vn
Hanoi Pedagogical University 2
32 Nguyen Van Linh, Xuan Hoa,
Phuc Yen city, Vinh Phuc province, Vietnam

² Email: giangnn@hub.edu.vn
Ho Chi Minh University of Banking
36 Ton That Dam, District 1, Ho Chi Minh City,
Vietnam

³ Email: linhdan1775@gmail.com
Duong Van Thi High School
161 La Xuan Oai, Tang Nhon Phu A, District 9,
Thu Duc city, Ho Chi Minh City, Vietnam

ABSTRACT: Nowadays, with the strong transformation of all sectors from the economy to the sciences, society, education has undergone significant changes. Instead of teaching theoretical knowledge as in the past, current teaching focuses on developing students' competence and qualities. According to the 2018 Mathematics curriculum for high school students, the use of learning tools and means is one of the five components in mathematical competence that needs to be developed for students. At the high school level, representing the solution set of a system of two-variable linear inequalities is emphasized. It reflects the potential development of the competence to use mathematics learning tools and aids (such as GeoGebra software). In this article, we present viewpoints on it, as well as its indicators, teaching process and training (using GeoGebra software) through teaching the representation of the solution set of a system of two-variable linear inequalities, as well as providing illustrative examples.

KEYWORDS: The competence to use mathematics tools and means, GeoGebra software, solution set of the system of two-variable linear equations, representation of solution sets.