Ứng dụng Số phức giải toán chứng minh trong Hình học phẳng

Hoàng Thúy Sinh*[1], Dương Hồng Huệ[2]

* Tác giả liên hệ
[1] Email: v.sinhht2@vinschool.edu.vn
[2] Email: v.huedh1@vinschool.edu.vn
Trường Trung học Vinschool Ocean Park
Khu đô thị Vinhomes Ocean Park,
Gia Lâm, Hà Nội, Việt Nam

TÓM TẮT: *Số phức được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học như khoa học kĩ thuật, điện từ, cơ học lượng tử và toán học ứng dụng, chẳng hạn như trong lí thuyết hỗn loạn. Nhà Toán học người Ý Gerolamo Cardano là người đầu tiên giới thiệu Số phức. Ông đã sử dụng Số phức để giải phương trình bậc ba vào thế kỉ XVI. Để thành công trong Toán học, cần có rất nhiều công cụ để có cơ hội tìm ra công cụ giải quyết các vấn đề bạn gặp phải. Khi lời giải hình học cổ điển trở nên quá phức tạp thì bạn nên nghĩ đến các phương pháp dùng Số phức. Số phức là công cụ mạnh trong việc khảo sát sâu sắc những vấn đề trong hình học, đặc biệt là các bài toán chứng minh. Bằng cách biểu diễn tọa độ của các điểm trong Hình học phẳng thông qua Số phức, có thể biểu diễn các điều kiện của đề bài hình học và các kết luận hình học về dạng các đẳng thức đại số. Như vậy, các bài toán chứng minh Hình học có thể đưa về việc kiểm tra một hằng đẳng thức.*

TỪ KHÓA: **Số phức, Hình học phẳng, bài toán, kiểm tra, chứng minh.**
➔ Nhận bài 20/12/2023 ➔ Nhận bài đã chỉnh sửa 08/01/2024 ➔ Duyệt đăng 15/4/2024.
DOI: https://doi.org/10.15625/2615-8957/12410407

1. Đặt vấn đề

Số phức ra đời do yêu cầu của việc mở rộng tập hợp số thực khi giải phương trình đại số nhưng là một công cụ quan trọng trong nhiều lĩnh vực khoa học và kĩ thuật, giúp mô hình hóa, phân tích và giải quyết các vấn đề phức tạp. Trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia hay quốc tế có khá nhiều các bài toán hình học liên quan gián tiếp đến Số phức. Việc sử dụng Số phức để giải các bài toán đó trở nên dễ dàng hơn bao giờ hết. Tuy nhiên, hiện nay Số phức không còn được giảng dạy trong chương trình sách giáo khoa mới. Nhận thấy được tầm quan trọng của Số phức trong giải các bài toán Hình học phẳng, nhóm tác giả mong muốn giới thiệu đến giáo viên và học sinh trung học một cách chi tiết hơn về Số phức, cách tiếp cận cũng như ứng dụng trong việc giải các bài toán chứng minh trong Hình học phẳng. Đây là một học liệu rất hữu ích dành cho học sinh ôn thi học sinh giỏi và việc tự nghiên cứu khám phá về Số phức có thể mở ra những cơ hội mới, đóng góp vào sự phát triển cá nhân và sự hiểu biết chung về Toán học.

2. Nội dung nghiên cứu

Giải các bài toán Hình học phẳng về chứng minh sẽ ngắn gọn và nhanh hơn khi sử dụng ngôn ngữ Số phức. Do vậy, việc tìm hiểu một số vấn đề cơ bản của Số phức như: Khái niệm Số phức, các phép toán trên tập các Số phức, các dạng biểu diễn của Số phức để chỉ rõ một số kết quả của hình học phẳng bằng ngôn ngữ của Số phức đóng vai trò rất quan trọng.

- Số phức được giới thiệu qua ba dạng: Dạng đại số của Số phức, dạng lượng giác của Số phức, dạng mũ của Số phức và các phép toán trên tập hợp Số phức.

- Các phép toán về Số phức bao gồm: Phép cộng, phép nhân, phép chia, lũy thừa của số phức và căn bậc n của Số phức.

2.1. Một số kết quả của Hình học phẳng bằng ngôn ngữ Số phức

Các kết quả của Hình học phẳng bằng ngôn ngữ Số phức được đưa ra ở dạng định nghĩa và tính chất:

- Một số định nghĩa trong Hình học phẳng bằng ngôn ngữ Số phức bao gồm:

• Biểu diễn điểm và vectơ bằng Số phức

Điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng Oxy là điểm biểu biểu diễn hình học của Số phức.

$z = x + yi$. Khi đó, Số phức $z = x + yi$ được gọi là tọa độ phức hay tọa vị của điểm M.

• Kí hiệu là $M(z)$.

Mặt phẳng tọa độ biểu diễn Số phức gọi là mặt phẳng phức. Trục Ox được gọi là trục thực, trục Oy được gọi là trục ảo.

• Khoảng cách giữa hai điểm

Cho hai điểm $M_1(z_1)$ và $M_2(z_2)$. Khoảng cách giữa hai điểm M_1 và M_2 được cho bởi $M_1M_2 = |z_2 - z_1|$.

• Độ đo của một góc

Cho hai điểm $M_1(z_1)$ và $M_2(z_2)$ trên mặt phẳng phức. Góc $\widehat{M_1OM_2}$ được định hướng dương nếu các điểm M_1 và M_2 theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ, hướng ngược lại là hướng âm.

$$\widehat{M_1OM_2} = \widehat{xOM_2} - \widehat{xOM_1} = \arg z_2 - \arg z_1 = \arg\frac{z_2}{z_1}$$

• Phương trình đường thẳng

Phương trình tổng quát của đường thẳng trong tọa độ Đề-các:

$$Ax + By + C = 0, A, B, C \in \mathbb{R}$$

Đặt $z = x + yi$ thì $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}, y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$. Khi đó, phương trình tổng quát của đường thẳng trong mặt phẳng phức có dạng như sau:

$$\overline{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$$

Trong đó, $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}, z = x + yi \in \mathbb{C}$

• Phương trình đường tròn

Phương trình đường tròn trong mặt phẳng tọa độ Đề-các:

$$x^2 + y^2 + 2Bx + 2Cy + D = 0, B^2 + C^2 > D$$

Đặt $z = x + yi$ thì $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}, y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$. Khi đó,

$$z\overline{z} + (B - iC)z + (B + iC)\overline{z} + D = 0$$

Đặt $\alpha = B + iC$ ta có:

$$z\overline{z} + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + D = 0, D \in \mathbb{R}, |\alpha|^2 - D > 0$$

Phép tịnh tiến

• Phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}$ (v) là phép biến hình biến điểm $M(z)$ thành điểm $M'(z')$ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến như sau:

$$z' = z + v$$

Phép quay

Phép quay tâm $I(z_0)$, góc quay α là phép biến hình biến điểm $M(z)$ thành điểm $M'(z')$ sao cho:

$$\begin{cases} IM = IM' \\ (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \alpha \end{cases}$$

• Biểu thức tọa độ của phép quay có dạng như sau:

$$z' - z_0 = e^{i\alpha}(z - z_0)$$

$$\Leftrightarrow z' = z_0 + e^{i\alpha}(z - z_0)$$

Đối xứng trục

• Phép đối xứng qua trục Δ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM'.

Phép đối xứng qua trục thực: $z' = \overline{z}$.

Phép đối xứng qua trục ảo: $z' = -\overline{z}$.

Phép vị tự

• Phép vị tự tâm $I(z_0)$, tỉ số $k \neq 0$ biến điểm $M(z)$ thành điểm $M'(z')$ sao cho $\overrightarrow{IM} = k\overrightarrow{IM'}$

• Biểu thức tọa độ của phép vị tự có dạng:

$$z' - z_0 = k(z - z_0)$$

$$\Leftrightarrow z' = z_0 + k(z - z_0)$$

• Một số tính chất trong Hình học phẳng bằng ngôn ngữ Số phức bao gồm hai kiến thức chính:

Điều kiện thẳng hàng, vuông góc và cùng thuộc một đường tròn

Xét bốn điểm phân biệt $M_i(z_i), i = \overline{1,4}$

Mệnh đề 1: Các điểm M_1, M_2, M_3 thẳng hàng khi và chỉ khi: $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$.

Mệnh đề 2: Đường thẳng M_1M_2, M_3M_4 vuông góc khi và chỉ khi $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}^*$.

Mệnh đề 3: Bốn điểm M_1, M_2, M_3, M_4 cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*$$

Tam giác đều

Mệnh đề: Giả sử z_1, z_2, z_3 là tọa độ các đỉnh của tam giác $A_1A_2A_3$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

$A_1A_2A_3$ là tam giác đều

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$$

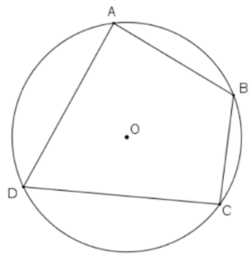
2.2. Ứng dụng của Số phức giải toán chứng minh trong Hình học phẳng

Việc sử dụng các kiến thức của Số phức để giải các bài toán Hình học phẳng rất hiệu quả, đặc biệt là các bài toán chứng minh là một cách làm nhanh và ngắn gọn.

Bằng cách lựa chọn mặt phẳng phức và gốc tọa độ, ta biểu diễn tọa độ của các điểm trong Hình học phẳng thông qua số phức và chuyển đổi các quan hệ trong Hình học phẳng thành các điều kiện liên quan đến số phức. Khi đó, các điều kiện của đề bài hình học và các kết luận hình học được biểu diễn về dạng các đẳng thức đại số. Như vậy, bài toán chứng minh hình học có thể đưa về việc kiểm tra một hằng đẳng thức.

Ví dụ 1: *(Bất đẳng thức Ptolemy)*

Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng, ta luôn $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A, B, C, D theo thứ tự là đỉnh của một tứ giác lồi nội tiếp một đường tròn.



Lời giải:

Xét mặt phẳng phức có gốc tọa độ trùng với điểm D.
Gỉa sử A(m), B(n), C(q), ta có:

$AB.CD + AD.BD = |(m-n)q| + |m(n-q)|$

$AC.BD = |(m-q)n|$

Áp dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a+b|$

$|(m-n)q| + |m(n-q)| \geq |(m-n)q + m(n-q)| = |(m-q)n|$

Do đó, $AB.CD + AD.BD \geq AC.BD$.
Dấu "=" xảy ra khi: $(m-n)q = km(n-q), k > 0$

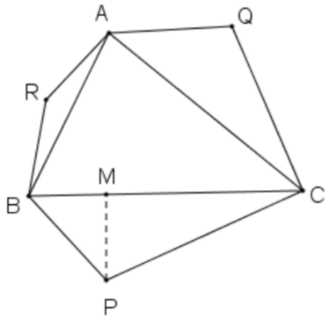
Khi đó: $\frac{q}{n-q} = k.\frac{m}{m-n}$ tức là $\arg\frac{q}{n-q} = \arg\frac{m}{m-n}$

Từ đó: $\widehat{DAB} = \pi - \widehat{DCB}$ nên tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn.

Học sinh có thể chứng minh bất đẳng thức Ptolemy bằng nhiều cách khác nhau như sử dụng phép nghịch đảo, sử dụng đường thẳng Simson hoặc sử dụng tính chất tam giác đồng dạng và bất đẳng thức tam giác, tuy nhiên cách chứng minh bằng số phức trên cho ta một cách giải ngắn gọn, đơn giản hơn rất nhiều.

Ví dụ 2: *(IMO 17- 1975)*

Về phía ngoài của tam giác ABC, lần lượt dựng các tam giác ABR, BCP, CAQ sao cho $\widehat{DAB} = \widehat{DAB} = 45^0$, $\widehat{BCP} = \widehat{QCA} = 30^0$, $\widehat{ABR} = \widehat{RAB} = 15^0$. Chứng minh rằng:
$\widehat{QRP} = 90^0, RQ = RP$



Lời giải:

Xét mặt phẳng phức với gốc tọa độ R.

Giả sử tọa độ của các điểm là A(a), B(b), C(c), P(p), Q(q), R(r)

Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ điểm P xuống cạnh BC.

Ta có: $MP = MB, \frac{MC}{MP} = \sqrt{3}$

Do đó: $\frac{p-m}{b-m} = i, \frac{c-m}{p-m} = i\sqrt{3}$

Khi đó: $p = \frac{c + b\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{b-c}{1+\sqrt{3}}i$

Tương tự: $q = \frac{c + a\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{a-c}{1+\sqrt{3}}i$

Xét phép quay tâm R, góc quay $-150^0 : A \to B$

$a \to b = a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

Ta được : $\frac{p}{q} = i \in i\mathbb{R}^*$. Từ đó: $PQ \perp PR$.

Mặt khác: $|p| = |iq| = |q|$ nên QR = PR.

Ở trường phổ thông, để giải những bài toán như trên ta thường sử dụng phép quay và tính chất của tam giác đồng dạng. Tuy nhiên, trong mặt phẳng phức, ta chỉ cần sử dụng phép quay và bài toán được giải không dài dòng phức tạp như ở phổ thông. Ngoài ra, chúng ta có thể sử dụng cách làm trên để giải bài toán tổng quát:

Về phía ngoài của tam giác ABC, lần lượt dựng các tam giác ABR, BCP, CAQ sao cho $\widehat{DAB} = \widehat{DAB} = \alpha, \widehat{BCP} = \widehat{QCA} = \beta, \widehat{ABR} = \widehat{RAB} = \gamma$, ở đó $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Xác định số đo các góc của tam giác PQR.

Như vậy, để giải một bài toán hình học bằng ứng dụng Số phức, chúng ta cần chú ý như sau:

- Chọn mặt phẳng tọa độ và góc tọa độ hợp lí. Chúng ta thường chọn gốc tọa độ trùng với những điểm đặc biệt hoặc có nhiều tính chất nhất.
- Sử dụng "Một số kết quả của Hình học phẳng bằng ngôn ngữ số phức" để chuyển đổi các giả thiết của bài toán sang ngôn ngữ Số phức và giải toán.

3. Kết luận

Việc nghiên cứu nội dung "Ứng dụng của Số phức giải toán chứng minh trong Hình học phẳng" sẽ giúp học sinh nắm vững hơn về phương pháp và kĩ năng sử dụng Số phức giải các bài toán Hình học phẳng. Các cách giải thông thường đòi hỏi học sinh cần phải nắm rất vững kiến thức về bất đẳng thức hình học và linh hoạt trong các bước biến đổi. Bằng phương pháp chuyển đổi sang ngôn ngữ Số phức và sử dụng các tính chất Số phức, bài toán trở nên dễ dàng và ngắn gọn hơn rất nhiều so với cách giải ở cấp Trung học phổ thông.

Bài viết cung cấp cho học sinh những kiến thức bổ ích về Số phức, giúp học sinh rèn luyện, bồi dưỡng năng lực giải toán Hình học, phát huy tính năng động và sáng tạo của học sinh khá giỏi.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, (2009), *Biến phức định lí và áp dụng*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[2] Nguyễn Văn Khuê - Lê Mậu Hải, (2001), *Hàm số biến số phức*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] Đoàn Quỳnh, (1997), *Số phức với Hình học phẳng*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[4] Nguyễn Hữu Điển, (2000), *Phương pháp Số phức và Hình học phẳng*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[5] Võ Thanh Vân, (2009), *Chuyên đề ứng dụng Số phức trong giải toán trung học phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.

[6] Titu Andresscu, (2000), *Complex Numbers from A to Z*, Birkhauser.

APPLYING COMPLEX NUMBERS TO SOLVE PROOF PROBLEMS IN PLANE GEOMETRY

Hoang Thuy Sinh*[1], Duong Hong Hue[2]

* Corresponding author
[1] Email: v.sinhht2@vinschool.edu.vn
[2] Email: v.huedh1@vinschool.edu.vn
Vinschool Ocean Park High School
Vinhomes Ocean Park Residential, Da Ton, Gia Lam, Hanoi, Vietnam

ABSTRACT: *Complex numbers are used in various fields of science, such as engineering science, electromagnetism, quantum mechanics, and applied mathematics, such as chaos theory. Gerolamo Cardano-an Italian mathematician, is the first person to introduce complex numbers. He used them to solve cubic equations in the 16th century. It is essential to have various tools to solve successfully difficult problems. Methods using complex numbers should be used instead of complicated classical geometry solutions. Complex numbers are powerful tools in geometry problems, especially proof problems. By representing the coordinates of points in plane geometry through complex numbers, conditions and conclusions of geometric problems can be expressed as algebraic equations. Thus, the geometric proof problem is reduced to an equality test problem.*

KEYWORDS: **Complex numbers, plane geometry, problems, test, proofs.**