

Tổ chức dạy học vận dụng nguyên hàm - tích phân giải bài toán thực tế thông qua mô hình hóa toán học

Phan Anh Tài

Trường Đại học Nguyễn Tất Thành
300A Nguyễn Tất Thành, Quận 4,
Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
Email: patai@ntt.edu.vn

TÓM TẮT: Bài báo trình bày về việc tổ chức dạy học vận dụng nguyên hàm - tích phân giải bài toán thực tế thông qua mô hình hóa toán học. Hoạt động này giúp học sinh nắm vững kiến thức nguyên hàm - tích phân và kỹ năng vận dụng nguyên hàm - tích phân giải bài toán thực tế. Tạo động cơ, khuyến khích các em tích cực vận dụng tri thức toán học để giải quyết vấn đề thực tiễn. Qua đó, giúp học sinh hiểu sâu hơn mối liên hệ giữa Toán học và thực tiễn, rèn luyện cho các em năng lực giải quyết vấn đề.

TỪ KHÓA: Mô hình hóa; nguyên hàm; tích phân; bài toán thực tế.

→ Nhận bài 11/4/2020 → Nhận bài đã chỉnh sửa 17/6/2020 → Duyệt đăng 15/9/2020.

1. Đặt vấn đề

Dạy học Toán, điều quan trọng là giáo viên (GV) làm thế nào để giúp học sinh (HS) hiểu, nắm vững và vận dụng tri thức toán học vào giải quyết vấn đề (GQVĐ). Trong đó, cần quan tâm giải quyết các vấn đề thực tiễn. Chủ đề nguyên hàm - tích phân chứa đựng nhiều tiềm năng to lớn trong việc phát huy năng lực nhận thức và sáng tạo của HS. Đây là một chủ đề thú vị trong chương trình toán học ở trường trung học phổ thông (THPT) với hệ thống lý thuyết và bài tập phong phú, đa dạng, có nhiều sự độc đáo trong các phương pháp giải tạo nên sự hấp dẫn say mê đối với HS.

Vận dụng các kiến thức về nguyên hàm - tích phân có thể giải quyết được một số vấn đề thuộc môn Toán. Ngoài ra, nó còn được áp dụng để GQVĐ trong các ngành khoa học khác như là Vật lý, Hóa học, Sinh học và các vấn đề thực tế. Do đó, để HS nắm vững bản chất của nội dung này thì cách tốt nhất các em phải làm chủ được tri thức đó, các em phải là người chủ động lĩnh hội tri thức và vận dụng chúng một cách thành thạo. Dạy học giải bài toán thông qua mô hình hóa (MHH) toán học sẽ giúp cho mong muốn, yêu cầu đó được khả thi hơn. Để giải quyết các bài toán thực tế, HS phải trải qua quá trình MHH toán học - quá trình chuyển vấn đề thuộc lĩnh vực ngoài toán học thành vấn đề của toán học, rồi sử dụng các công cụ toán để tìm câu trả lời cho vấn đề được đặt ra.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Bài toán thực tế

Lý thuyết Giáo dục Toán học theo thực tế (*Theory of Realistic Mathematic Education*) đã được hình thành và phát triển tại Viện Freudenthal ở Hà Lan vào khoảng những năm 1970 của thế kỉ XX. Theo Freudenthal (1991), Giáo dục Toán học theo thực tế có hai quan điểm cốt lõi [1].

- Toán học phải được kết nối với thế giới thực tế, gắn

gũi với trẻ em và có liên quan đến các tình huống trong cuộc sống hàng ngày.

- Toán học nên được xem như là hoạt động của con người, liên quan đến xã hội loài người.

Bài toán thực tế bao gồm các tình huống liên quan đến thế giới thực tế và các tình huống có vấn đề (problem situation) với nội dung liên quan đến Toán học được mô phỏng từ thực tế trong một bối cảnh dạy học cụ thể. Lang (1996) khẳng định rằng, các tình huống có vấn đề cũng bao hàm các ứng dụng và các tình huống mô hình hóa (modeling). Theo Phạm Văn Hoàn [2], việc áp dụng toán để giải quyết những bài toán thực tế thường được tiến hành qua các bước sau:

Bước 1: Chuyển bài toán thực tế về dạng ngôn ngữ thích hợp với lý thuyết toán học dùng để giải (lập mô hình toán học của bài toán);

Bước 2: Giải bài toán trong khuôn khổ của lý thuyết toán học;

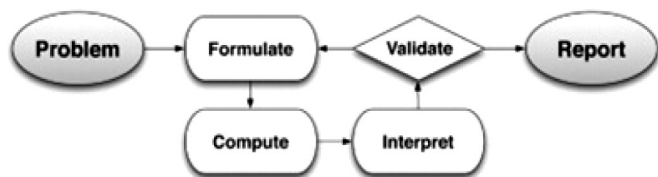
Bước 3: Chuyển kết quả lời giải toán học của bài toán về ngôn ngữ của lĩnh vực thực tế (thể hiện cụ thể lời giải toán học).

2.2. Mô hình toán học và quy trình giải bài toán thực tế thông qua mô hình hóa toán học

Theo Common Core State Standards (2016) [1], mô hình hóa toán học là một tiến trình lựa chọn, sử dụng các công cụ toán học và thống kê thích hợp để phân tích các tình huống thực tế, để hiểu chúng tốt hơn và để cải tiến các quyết định. Như vậy, mô hình toán học được hiểu là thể hiện một vấn đề thực tế dưới dạng của ngôn ngữ toán học. MHH toán học là quá trình sử dụng công cụ toán học tạo ra các mô hình để giải quyết các vấn đề liên quan đến các tình huống thực tiễn. Nhiều nhà nghiên cứu đã thiết lập quy trình giải bài toán thực tế thông qua MHH toán học dưới dạng sơ đồ. Các sơ đồ chỉ ra bản chất của hoạt động MHH toán học như là một hướng dẫn để thiết

kể các nhiệm vụ MHH và thực hiện MHH trong dạy học. Dưới đây, chúng tôi giới thiệu một số quy trình MHH toán học dưới dạng sơ đồ.

Thứ nhất, quy trình giải bài toán thực tế thông qua MHH toán học theo Common Core State Standards



Sơ đồ 1: Quy trình giải bài toán thực tế thông qua MHH toán học theo Common State Standards [2]

Quy trình giải bài toán thực tế thông qua MHH toán học theo Sơ đồ 1 trình bày trên đây lần lượt thực hiện các bước sau:

Bước 1: Từ vấn đề (problem) phát sinh trong tình huống, ta xác định các biến số của tình huống và lựa chọn khung lý thuyết để mô phỏng những yếu tố then chốt;

Bước 2: Xây dựng (formulate) một mô hình bằng cách tạo ra và lựa chọn các đối tượng hình học, đồ thị, biểu bảng, đại số hoặc thống kê để mô tả mối quan hệ giữa các biến số;

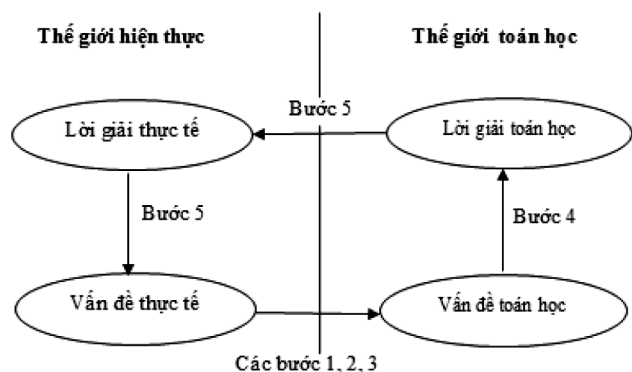
Bước 3: Phân tích, thiết lập các phép toán trong các mối quan hệ và tính toán (compute) để tìm ra kết luận;

Bước 4: Diễn giải (interpret) các kết quả toán học trong kết luận về lại tình huống ban đầu;

Bước 5: Xác nhận (validate) lại xem kết luận có phù hợp hay không bằng việc so sánh nó với tình huống ban đầu và cải tiến mô hình (sau đó, lặp lại chu trình từ Bước 2) hoặc nếu chấp nhận các kết quả thì...

Bước 6: Viết báo cáo (report) kết luận và giải thích lý do chấp nhận các kết quả này.

Thứ hai, quy trình giải bài toán thực tế thông qua MHH toán học theo OECD



Sơ đồ 2: Quy trình giải bài toán thực tế thông qua MHH toán học theo OECD [3]

Quy trình giải bài toán thực tế thông qua MHH toán học theo Sơ đồ 2, bao gồm 5 bước có nội dung như sau:

Bước 1: Bắt đầu từ một vấn đề được đặt ra trong thực tế;

Bước 2: Nhận ra các kiến thức toán phù hợp với vấn đề, tổ chức lại vấn đề theo các khái niệm toán học;

Bước 3: Không ngừng cắt tĩa các yếu tố thực tế để chuyển vấn đề thành một bài toán mà thể hiện trung thực cho tình huống;

Bước 4: Giải quyết bài toán;

Bước 5: Làm cho lời giải của bài toán có ý nghĩa đối với tình huống thực tế, xác định những hạn chế của lời giải.

Các quy trình giải bài toán thực tế thông qua MHH toán học trên đây cũng như của một số quy trình khác. Về cấu trúc, phân hoạch thành các bước và diễn đạt chi tiết các nhiệm vụ trong từng bước có thể khác nhau. Một nhiệm vụ cụ thể nào đó có thể thuộc bước này của một quy trình nhưng thuộc bước khác của quy trình kia, nhưng các nhiệm vụ cơ bản và trình tự thực hiện ở các quy trình có sự tương đồng giữa các quy trình.

2.3. Tổ chức dạy học vận dụng nguyên hàm - tích phân giải bài toán thực tế thông qua mô hình hóa toán học

2.3.1. Tổ chức dạy học Toán thông qua mô hình hóa toán học

Trong dạy học Toán, việc thực hiện quy trình MHH luôn tuân theo một cơ chế linh hoạt, mềm dẻo và có sự điều chỉnh phù hợp với bài toán thực tế để vấn đề trở nên đơn giản hơn, dễ hiểu hơn đối với HS phổ thông, giúp các em vận dụng kiến thức Toán học vào giải quyết bài toán thực tế. Do đó, để phù hợp với thực tiễn dạy học Toán, chúng tôi xây dựng quy trình tổ chức hoạt động MHH toán học trong dạy học giải bài toán thực tế gồm 5 bước sau:

Bước 1: Tìm hiểu bài toán thực tế

GV tổ chức cho HS phân tích, xác định giả thuyết, các tham số, biến số, đơn giản hóa vấn đề, làm sáng tỏ, lọc ra những yếu tố quan trọng sẽ sử dụng trong phạm vi của bài toán thực tế, thiết lập mối liên hệ giữa các yếu tố.

Bước 2: Xây dựng mô hình toán học

HS tiếp tục lựa chọn và sử dụng ngôn ngữ toán học mô tả bài toán thực tế, xây dựng nội dung bài toán toán học và dự đoán tính phức tạp của nó.

Bước 3: Giải bài toán

Các em liên tưởng, huy động kiến thức, sử dụng các công cụ toán học thích hợp để giải bài toán toán học.

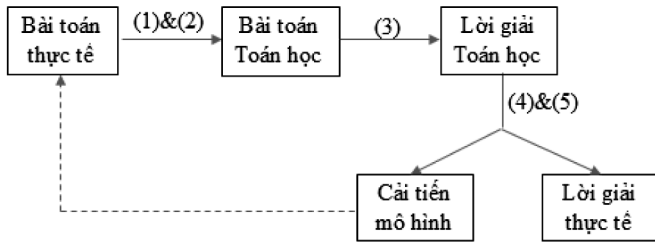
Bước 4: Hiểu lời giải bài toán

Từ kết quả của bước 3, HS hiểu được lời giải của bài toán và ý nghĩa của mô hình toán học trong bối cảnh thực tiễn.

Bước 5: Đánh giá mô hình

Tổ chức cho HS kiểm tra tính hợp lý và tối ưu của mô hình toán học đã xây dựng; đưa ra kết luận, giải thích sự phù hợp với thực tế; dự đoán, cải tiến mô hình (có độ phức tạp cao hơn) hoặc bắt đầu lại quy trình. Kết thúc

bước này, GV hướng dẫn HS sử dụng ngôn ngữ và công cụ của Toán học để mô tả các ý tưởng toán học, biểu diễn các vấn đề trong thực tiễn. Tóm lược quá trình tổ chức hoạt động MHH toán học trong dạy học giải bài toán thực tế theo Sơ đồ 3:



Sơ đồ 3: Quy trình tổ chức hoạt động MHH toán học giải bài toán thực tế

Trong dạy học Toán, thông qua hoạt động MHH toán học giải bài toán thực tế HS thực hiện các thao tác tư duy, khám phá tri thức. Từ đó, rèn luyện cho các em năng lực giải quyết vấn đề thực tiễn cuộc sống.

2.3.2. Ví dụ tổ chức dạy học vận dụng nguyên hàm - tích phân giải bài toán thực tế thông qua mô hình hóa toán học

Trong phần này, tổ chức dạy học vận dụng nguyên hàm - tích phân giải bài toán thực tế thông qua MHH toán học với mục đích tạo hứng thú, kích thích tính tò mò, tạo sự quan tâm đến tình huống và gợi lên định hướng áp dụng nguyên hàm - tích phân giải bài toán thực tế. Đưa ra một số bài toán thực tế làm ví dụ tổ chức cho HS làm việc theo nhóm, chúng tôi mong đợi ở HS một số câu trả lời và trình bày các chiến lược cho các tình huống được dự kiến.

Ví dụ: Xét bài toán: Một ô tô chạy với vận tốc 20m/s thì gặp sự cố phía trước, tài xế đạp phanh (đạp “thắng”). Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ (m/s). Trong đó, t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu? Tổ chức dạy học thông qua MHH toán học theo quy trình 5 bước sau:

Bước 1: Tìm hiểu bài toán thực tế

GV tổ chức cho HS nghiên cứu và thảo luận nhóm về những số liệu cần thiết cần thu thập nhằm đơn giản hóa bài toán; Hướng dẫn HS tìm các từ khóa, xác định những yếu tố (tham số) có liên quan đến vấn đề trên và đơn vị tính nhằm thiết lập điều kiện ban đầu của bài toán; Xác định những tham số quan trọng và loại bỏ những tham số phụ. Các từ khóa cần xác định: *Ô tô chạy, vận tốc, đạp phanh, chuyển động chậm dần đều, thời gian, quãng đường, ô tô dừng.*

Các tham số xuất hiện trong bài toán (được các nhóm đưa ra): *vận tốc, chuyển động, chậm dần đều, thời gian, quãng đường, đạp phanh, dừng hẳn.* Sau khi nghiên cứu

kĩ lưỡng và thảo luận theo nhóm, GV hướng dẫn HS lựa chọn các tham số cơ bản: Chậm dần đều, quãng đường, vận tốc, thời gian; Loại bỏ một số tham số phụ: chuyển động, đạp phanh, dừng hẳn; Thống nhất đơn vị tính là m.

Bước 2: Xây dựng mô hình toán học

Sau khi xác định được các tham số cơ bản, GV tiếp tục định hướng cho HS thiết lập các điều kiện ban đầu, xác định biến số và xây dựng hàm số.

Thời gian là lúc ô tô bắt đầu phanh $t = 0$;

T là thời điểm ô tô dừng lại, vận tốc lúc dừng là

$$v(T) = 0;$$

Thời gian từ lúc đạp phanh đến lúc dừng là

$$v(T) = 0 \Rightarrow -40T + 20 = 0 \Leftrightarrow T = \frac{1}{2};$$

$s(t)$ là quãng đường ô tô đi được trong khoảng thời gian T ;

GV tiếp tục cho HS thảo luận để chỉ ra được mối liên hệ giữa “vận tốc” và “quãng đường” trong bài toán chuyển động. Từ đó, để giải bài toán cần huy động những kiến thức nào?

$v(t) = s'(t)$ suy ra $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$. HS áp dụng tích phân để tính quãng đường.

Bước 3: Giải bài toán

HS sử dụng các số liệu, kiến thức cần huy động ở trên để tìm quãng đường ô tô đi chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn.

Trong $\frac{1}{2}$ (s) ô tô đi được quãng đường là:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} v(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (-40t + 20) dt = (-20t^2 + 20t) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 5(m).$$

Bước 4: Hiểu lời giải bài toán

Từ kết quả của Bước 3, GV hướng dẫn HS quay trở lại vấn đề đã đặt ra để hiểu yêu cầu của bài toán. HS thảo luận để nhận biết được $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$, áp dụng tích phân để tính quãng đường ô tô đi chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn.

Bước 5: Đánh giá mô hình

Từ những kiến thức toán học (tích phân, nguyên hàm, toán học trong vật lí,...) được sử dụng trong quá trình giải quyết vấn đề, GV định hướng HS thảo luận tìm hiểu thực tế để kiểm nghiệm lời giải của bài toán và GV kết luận kết quả bài toán. Tiếp đó, HS thảo luận về những ưu điểm, hạn chế của mô hình và cải tiến mô hình bằng cách thay đổi tham số. Chẳng hạn, cho biết quãng đường từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn và yêu cầu xác định vận tốc ban đầu a của ô tô. Từ đó, thành lập bài toán mới. Đại diện nhóm HS trình bày ý kiến thảo luận nhằm giúp GV đánh giá sản phẩm và năng lực giải quyết vấn đề của mỗi nhóm và giới thiệu thêm cho HS việc mở rộng bài toán này.

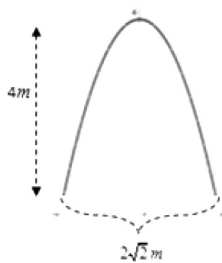
Bài toán thực hành:

Bài 1: Một ô tô đang chạy đều với vận tốc $a(m/s)$ thì người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + a(m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ vận tốc ban đầu a của ô tô là bao nhiêu, biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô di chuyển được 40 mét.

Bài 2: Một cái chuông (xem Hình 5). Giả sử khi cắt chuông bởi mặt phẳng qua trục của chuông, được thiết diện có đường viền là một phần parabol (xem Hình 6). Biết chuông cao $4m$, và bán kính của miệng chuông là $2\sqrt{2} m$. Tính thể tích chuông?



Hình 5



Hình 6

Bài 3: Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện D tiến hành xả lũ với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $v(t) = 10t + 500 (m^3/s)$. Hỏi sau thời gian 45 phút xả lũ thì hồ chứa nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

3. Kết luận

Cùng với những hạn chế bởi kiến thức toán, khi thực hiện MHH toán học, HS có thể gặp những khó khăn như: Không hiểu nội dung bài toán thực tế; Xác định không đúng, không đầy đủ giả thiết, chưa nhận ra các biến quan trọng để thiết lập mô hình toán; Không biết huy động kiến thức và lựa chọn một phương pháp giải phù hợp cũng như giải thích kết quả hợp lí. Hoạt động MHH trong dạy học Toán ở các trường phổ thông vận dụng dựa theo quy trình 5 bước chúng tôi đã đề xuất trong bài báo này giúp HS vượt qua được những khó khăn trong quá trình giải bài toán thực tế. Nhất là khi các em được GV giới thiệu từng bước quy trình MHH một cách chi tiết, khoa học. Với mỗi bài toán, có thể hướng dẫn để HS thực hiện toàn bộ hay chỉ một số bước của quy trình. Tổ chức dạy học vận dụng dụng nguyên hàm - tích phân giải bài toán thực tế thông qua mô hình hóa toán học, chúng tôi đã sử dụng phương pháp thảo luận nhóm. Đây là phương pháp khá hiệu quả giúp HS thiết lập mô hình toán học cũng như vận dụng những kiến thức Toán được học giải quyết những bài toán do thực tiễn đặt ra.

Kiến thức nguyên hàm - tích phân được phân chiếu một cách sâu sắc qua thực tiễn cuộc sống. Thông qua quá trình MHH toán học, HS hiểu sâu hơn mối liên hệ chặt chẽ giữa kiến thức nguyên hàm - tích phân với thực tiễn cuộc sống giúp HS phát triển khả năng nhận thức tri thức toán học ở mức độ cao hơn, rèn luyện kỹ năng hợp tác và nâng cao các kỹ năng giải quyết các vấn đề thực tiễn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Bùi Anh Tuấn - Ngô Tùng Hiếu - Bùi Hồng Duyên, (2017), *Xây dựng các bài toán thực tế ở lớp 10: thực nghiệm nhỏ tại thành phố Cần Thơ*, Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Cần Thơ, Tập 48, Phần C, tr.1-11.
- [2] Phạm Văn Hoàn - Nguyễn Gia Cốc - Trần Thúc Trình, (1981), *Giáo dục học môn Toán*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [3] OECD, (2003), *The Pisa 2003 - Assessment Framework - Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, OECD, Paris, France.
- [4] Stewart J, (2012), *Calculus: Early Transcendentals, Seventh Edition*, Cengage Learning, 1194 pages.
- [5] Blum Werner, (2011), *Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research*, In Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling, edited by Gabriele Kaiser, Werner Blum, Rita Borromeo Ferri, and Gloria Stillman, pp. 15-30, New York: Springer.

ORGANIZING TEACHING TO APPLY THE PRIMITIVE - INTEGRAL IN SOLVING PRACTICAL PROBLEMS THROUGH MATHEMATICAL MODELING

Phan Anh Tài

Nguyen Tat Thanh University
300A Nguyen Tat Thanh, District 4,
Ho Chi Minh City, Vietnam
Email: patai@ntt.edu.vn

ABSTRACT: This article is aimed to present the organization of teaching and applying a primitive - integral to solving practical problems through mathematical modeling. This activity helps students master the knowledge of the primitive - integral and the skills of applying the primitive - integral to solving the real problems. It is also effective in promoting learners motivation and encouraging them to actively use mathematical knowledge in solving practical problems. Thereby, students will gain a deeper understanding of the relationship between mathematics and practice; contributing to improving their problem-solving competence.

KEYWORDS: Modeling; primitive; integral; practical problems.