

SỬ DỤNG PHẦN MỀM GEOGEBRA KIỂM NGHIỆM CÁC DỰ ĐOÁN VÀ HỖ TRỢ KHÁM PHÁ LỜI GIẢI TRONG DẠY HỌC GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

BÙI MINH ĐỨC

Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
Email: ducbm297@gmail.com

Tóm tắt: Bài toán tìm một điểm thuộc một mặt phẳng hay một mặt cầu cho trước, nhìn hai điểm cho trước với một góc lớn nhất hoặc có tổng khoảng cách đến hai điểm cho trước nhỏ nhất là dạng toán không xa lạ đối với học sinh nhưng không dễ dàng tìm ra lời giải. Phần mềm GeoGebra có thể hỗ trợ kiểm nghiệm các phán đoán và khám phá lời giải những bài toán dạng này.

Từ khóa: Phần mềm GeoGebra; kiểm nghiệm; dự đoán; khám phá; hình học không gian.

(Nhận bài ngày 31/5/2017; Nhận kết quả phản biện và chỉnh sửa ngày 08/6/2017; Duyệt đăng ngày 25/7/2017).

1. Đặt vấn đề

Trong giải toán và nghiên cứu toán học, có một số hoạt động quan trọng, cần thiết cho mỗi người là dự đoán, phân tích, tìm tòi, khám phá. Có không ít trường hợp, những hoạt động này chiếm khá nhiều thời gian và công sức của chúng ta. Chúng ta có thể sử dụng một số chức năng đo đạc, tính toán, vẽ hình của một số phần mềm hỗ trợ để giảm bớt thời gian và công sức trong việc kiểm nghiệm tính đúng sai của những dự đoán, phân tích. Chẳng hạn như phần mềm GeoGebra, Geometer Skechpad, Cabri 2D, 3D.... Theo Battista (2001): Trong bối cảnh hiện nay, học sinh (HS) cũng có thể dựa trên những chương trình máy tính để có những dự đoán hữu ích [1].

Trong tác phẩm “Quy nạp và tương tự trong Toán học”, Polya G. (1954) đã đề cập đến một hiện tượng vật lý là “ánh sáng luôn chọn đường đi ngắn nhất... liên quan tới tính chất phản xạ của gương phẳng” [2]. Mô hình toán học của hiện tượng này với một bài toán hình học là: Cho hai điểm và một đường thẳng, tất cả cùng thuộc một mặt phẳng, hai điểm cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng đó. Tìm trên đường thẳng một điểm có tổng khoảng cách từ nó tới hai điểm đã cho nhỏ nhất. Bài toán này đã được đưa vào trong sách giáo khoa môn Toán của một số nước, chẳng hạn trong sách giáo khoa ở Việt Nam [3]. Bài toán này cũng được chuyển một cách tương tự thành bài toán trong hình học không gian, bằng cách thay đổi tương “đường thẳng” trong bài toán thành “mặt phẳng” hoặc bỏ đi điều kiện “tất cả cùng thuộc một mặt phẳng” để được một bài toán trong không gian [2].

Polya còn đưa ra bài toán: Cho hai điểm và một đường thẳng, tất cả cùng thuộc một mặt phẳng, hai điểm cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng đó. Trên đường thẳng đã cho, tìm một điểm sao cho nó nhìn hai điểm đã cho trước đó với một góc lớn nhất có thể [2]. Kyeongsik Choi (2012) cũng đã nhắc tới bài toán

này trong một bài báo và đã sử dụng GeoGebra như một công cụ để nghiên cứu bài toán. Theo ông, Chương trình Giáo dục Quốc gia năm 2009 của Hàn Quốc có khuyến khích giáo viên (GV) sử dụng công nghệ thông tin để tăng cường khả năng giải quyết vấn đề và hỗ trợ những tính toán phức tạp [4].

Thực tế cũng đặt ra một số vấn đề sau: (1) Chọn vị trí nào trên trái đất có tổng khoảng cách đến hai vị trí cố định ở ngoài trái đất có giá trị nhỏ nhất? (2) Chọn vị trí nào trên trái đất có góc nhìn đến hai vị trí cố định ở ngoài trái đất có giá trị lớn nhất?

Mô hình toán học hóa hai vấn đề trên, chúng ta có hai bài toán sau: Tìm điểm trên mặt cầu có tổng khoảng cách đến hai điểm ở ngoài mặt cầu có giá trị nhỏ nhất? (2) Chọn vị trí nào trên mặt cầu có góc nhìn đến hai điểm cố định ở ngoài mặt cầu có giá trị lớn nhất?

2. Khảo sát thực tế

Chúng tôi đã lập phiếu điều tra từ 137 sinh viên (SV) năm cuối hệ đại học Sư phạm Toán của Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, K63, vào tháng 12 năm 2016 về việc giải hai bài toán (1) và (2) nêu trên. Kết quả là: Trong khoảng thời gian 120 phút, không có SV nào làm được một trong hai bài toán này; thậm chí không có SV nào đoán đúng điểm cần tìm trong hai bài toán này. Mặc dù trước đó chúng tôi đã có những gợi ý, dẫn dắt từ bài toán trong hình học phẳng chuyển sang bài toán của hình học không gian, thông qua các hoạt động trí tuệ như tương tự hóa, khái quát hóa. Với bài toán đơn giản đã có trong sách giáo khoa là: Trong mặt phẳng, cho hai điểm thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d ; tìm trên d một điểm có tổng khoảng cách từ nó tới hai điểm đó có giá trị nhỏ nhất, có tới gần 5% (17/137) số SV được hỏi không làm được. Với câu tương tự: Trong mặt phẳng, cho hai điểm thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d , tìm trên d một điểm nhìn hai điểm đó



dưới góc lớn nhất cũng không có SV nào làm được, chỉ có 3 SV đoán đúng được điểm cần tìm, chiếm khoảng 2% số SV được hỏi (3/137).

Đến câu hỏi thay đường thẳng d bằng đường tròn: “Trong mặt phẳng, cho hai điểm A, B và đường tròn (C), tìm điểm M trên (C) sao cho MA + MB nhỏ nhất và tìm điểm trên (C) nhìn hai điểm đó dưới góc lớn nhất”, không có SV nào làm được. Dĩ nhiên, với câu hỏi thay đường tròn bằng mặt cầu: “Trong không gian, cho hai điểm A, B và mặt cầu (T), đoạn AB ở ngoài mặt cầu (T), tìm điểm C trên (T) sao cho góc ACB lớn nhất, sao cho CA + CB nhỏ nhất”, như đã nói ở trên, không có SV nào làm được; thậm chí không có SV nào đoán đúng được điểm cần tìm. Riêng câu tương tự: Trong không gian, cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P), đoạn AB không cắt (P), tìm điểm C trên (P) sao cho tổng CA + CB nhỏ nhất” có 75 SV làm được, chiếm gần 55% số SV được hỏi, còn 62 SV không làm được (hơn 45%).

Điều tra từ 270 HS lớp 12 trung học phổ thông thuộc địa bàn tỉnh Nghệ An, tháng 12 năm 2016, kết quả cũng tương tự. Có duy nhất một em đoán đúng được điểm cần tìm ở bài toán: “Trong mặt phẳng, cho đường tròn (C) và hai điểm A, B nằm ngoài (C), tìm điểm M trên (C) sao cho AM + MB nhỏ nhất”. Có 13 em đoán đúng điểm cần tìm trong bài toán: “Trong mặt phẳng, cho đường thẳng d / đường tròn (C) và đoạn AB không cắt d / (C), tìm điểm M trên d / (C) sao cho góc AMB lớn nhất”, chiếm gần 5% (13/ 270) và có 7 em đoán đúng điểm cần tìm trong bài toán này cho trường hợp đường thẳng d , chiếm gần 3% (7/ 270).

Kết quả điều tra chứng tỏ các dạng toán trên không phải là dạng toán quá xa lạ nhưng không phải là dạng toán dễ đối với HS và cả những GV tương lai. Sau đây chúng tôi sẽ trình bày việc sử dụng một trong những phần mềm đo các đại lượng hình học hỗ trợ kiểm nghiệm tính đúng sai của những dự đoán và khám phá điểm cần tìm trong những bài toán nói trên.

3. Ý nghĩa của hoạt động dự đoán, tìm tòi, khám phá trong giải toán

Theo Từ điển tiếng Việt của tác giả Hoàng Phê (1996): Dự đoán là đoán trước tình hình nào đó có thể xảy ra; Dự đoán có tác dụng định hướng cho việc giải quyết vấn đề. Khám phá là tìm ra cái ẩn giấu, bí mật. Sự khám phá là hành động phát hiện thường được hiểu nghĩa là sau một quá trình tìm kiếm sẽ thấy được một đồ vật (hay sự vật) bị che giấu hay chưa được thấy.

Flewelling và Higginson (2002) đã chỉ ra rằng HS thật sự bị cuốn hút vào các giờ học toán nếu các em được làm việc trong một môi trường học tập đặt trọng tâm vào hoạt động khám phá toán học. Điều đó buộc các GV toán phải nỗ lực đổi mới việc dạy học toán của mình [5].

Theo Nguyễn Bá Kim (2011): GV phải hướng đến việc dạy toán theo nhiều hoạt động, phải tạo ra được môi trường học tập tích cực nhằm kích thích HS tự tìm tòi, khám phá kiến thức để phát triển khả năng giải quyết vấn đề và tư duy toán học của mình [3].

Theo Bailey J. (2007) và Ponte (2007): Tạo cơ hội cho HS xem xét, nghiên cứu trong quá trình dạy học là một cách tiếp cận dạy học hiệu quả vì nó có thể mang đến cho HS cơ hội khám phá kiến thức toán trong một môi trường học tập thú vị và mang tính tương tác cao [6].

Theo Quinnell (2010): Với các bài toán kết thúc mở, HS được khuyến khích khám phá bằng các hoạt động trải nghiệm toán như quan sát, đặt câu hỏi và giả thuyết, đoán và thử, tìm kiếm quy luật... và được tự do theo đuổi các ý tưởng toán học phù hợp với mức độ nhận thức của mình.

4. Thiết kế tình huống hướng dẫn học sinh sử dụng phần mềm GeoGebra để kiểm định tính đúng sai của những dự đoán và hỗ trợ tìm tòi, khám phá trong giải toán hình học không gian

Nhờ các chức năng đo độ dài của đoạn thẳng, đo độ lớn của góc, GeoGebra có thể giúp chúng ta kiểm định tính đúng sai của những phán đoán và hỗ trợ chúng ta tìm tòi, khám phá trong quá trình giải quyết một số vấn đề toán học. Sau đây chúng tôi đưa ra kết quả thiết kế một số tình huống hướng dẫn HS sử dụng phần mềm GeoGebra hỗ trợ kiểm nghiệm tính đúng sai của những dự đoán và hỗ trợ tìm tòi, khám phá trong giải toán hình học không gian.

Bài toán: Trong không gian cho hai điểm A, B và mặt cầu (O) tâm O, bán kính R, đoạn AB không có điểm chung với (O). Tìm điểm M thuộc mặt cầu (O) sao cho góc AMB lớn nhất (Hình 1).

Hoạt động trên lớp

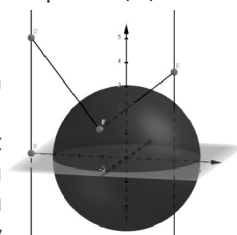
Hoạt động 1 (Dự đoán điểm cần tìm):

Như kết quả đã khảo sát ở trên, đây là bài toán không dễ dàng tìm được lời giải. Sau khoảng thời gian cho HS suy nghĩ tìm lời giải bài toán, GV nên gợi ý cho HS dự đoán về điểm cần tìm.

Có thể có những dự đoán sau về điểm cần tìm:

- Là điểm M_1 - giao điểm mặt cầu và đường thẳng qua tâm mặt cầu, vuông góc và cắt đường thẳng AB.
- Là điểm M_2 - giao điểm mặt cầu và đường trung trực của đoạn AB trong mặt phẳng qua AB và tâm mặt cầu.
- Là một trong hai điểm M_3, M_4 - giao điểm mặt cầu và OA, OB.
- Là điểm M_5 giữa cung nối M_3 và M_4 trên đường tròn lớn của mặt cầu qua M_3, M_4 .
- Là điểm M_6 có tiếp tuyến tại đó của mặt cầu song song với AB và nằm trong mặt phẳng (OAB).
- Là điểm nhìn AB dưới góc vuông, trong mặt phẳng (OAB)...

Việc chứng minh những dự đoán trên là đúng sẽ không thể thực hiện được bởi những dự đoán trên đều sai, song việc bác bỏ những dự đoán đó cũng tốn không ít thời gian và công sức. Chúng ta có thể sử dụng phần

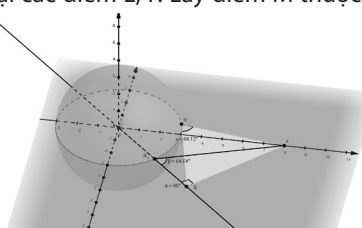


Hình 1

mềm GeoGebra để bác bỏ các kết quả dự đoán đó một cách dễ dàng hơn. Chỉ cần chọn những trường hợp đặc biệt, ta sẽ có những phản ví dụ để bác bỏ những dự đoán không đúng.

Hoạt động 2: Mở phần mềm GeoGebra và chọn hiển thị 3D.

Không mất tính tổng quát, ta có thể coi mặt cầu đã cho là mặt cầu có tâm là gốc tọa độ O , bán kính R , điểm A đã cho thuộc trục Ox , điểm B đã cho thuộc mặt phẳng xOy . Để thuận lợi cho việc phát hiện tính chất của điểm cần tìm, ta có thể đặt các độ dài là số nguyên, chẳng hạn $R = 3$, $A(8; 0; 0)$, $B(4; -1; 0)$. Nối các đoạn thẳng OA , OB lần lượt cắt mặt cầu (C) tại các điểm E , F . Lấy điểm M thuộc mặt cầu (C) và tính độ lớn góc AMB khi M di chuyển trên mặt cầu (C) . (Hình 2)



Hình 2

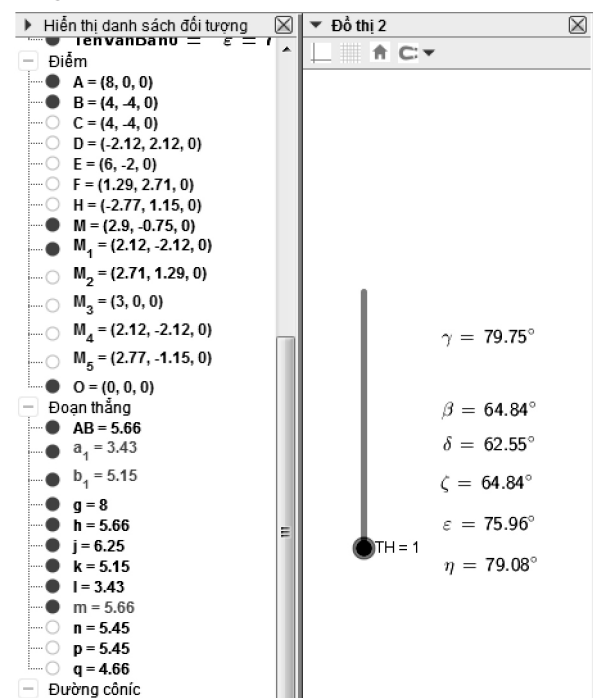
- Tại một điểm M ở gần trục Ox đo được $79,75^\circ$.

- Tại điểm M_1 số đo góc AM_1B xấp xỉ $64,84^\circ$, nhỏ hơn $79,75^\circ$. Loại điểm M_1 .

- Tương tự, các góc AM_2B , AM_3B , AM_4B , AM_5B theo thứ tự đo được là $62,55^\circ$, $64,84^\circ$, $75,96^\circ$, $79,06^\circ$. Các góc này đều nhỏ hơn $79,75^\circ$. Loại các điểm M_2 , M_3 , M_4 , M_5 . Điểm M_6 trùng với điểm M_1 .

(Xem bảng giá trị các góc ở Hình 3)

Vậy tất cả các điểm đã dự đoán ở trên đều không đúng.

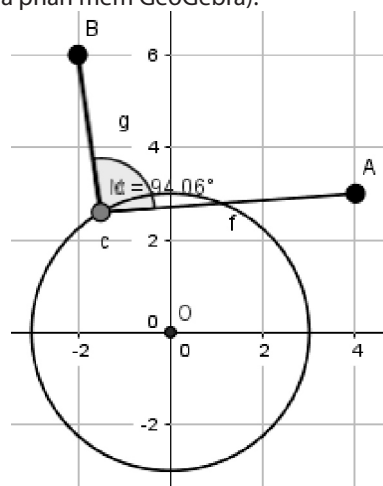


Hình 3

Cũng có HS đoán rằng M là điểm nhìn AB dưới góc vuông. Phán đoán này còn nhiều vấn đề. Thứ nhất: Liệu có tồn tại điểm đó không? (sẽ không tồn tại khi mặt cầu đã cho và mặt cầu đường kính AB không có điểm chung!). Thứ hai: Nếu tồn tại thì có bao nhiêu điểm và độ lớn các góc tại các điểm đó có khác nhau hay không? Chọn giá trị lớn nhất như thế nào?

Vậy điểm cần tìm là điểm nào?

Hoạt động 3 (Khám phá lời giải bài toán này với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra):



Hình 4

GV: Các dự đoán ở trên đều tập trung vào các điểm thuộc giao tuyến của mặt cầu và mặt phẳng qua tâm mặt cầu và hai điểm đã cho, tức là mặt phẳng (OAB) . Có thể kiểm nghiệm lại điều đó là đúng.

Đến đây bài toán của chúng ta quy về bài toán trong mặt phẳng:

Trong mặt phẳng cho hai điểm A , B và đường tròn (C) , tâm O , đoạn AB ở ngoài đường tròn (C) . Tìm điểm M thuộc (C) sao cho góc AMB lớn nhất (Hình 4).

GV: Góc AMB có gợi ra một hình quen thuộc nào liên quan tới ba điểm A , M , B hay không?

HS: Có thể nghĩ đến đường tròn/cung tròn qua ba điểm này.

GV: Dùng phần mềm vẽ đường tròn qua ba điểm A , M , B và yêu cầu HS xem có những vị trí tương đối của đường tròn này và đường tròn (C) ?

HS: Có hai vị trí: Đường tròn (AMB) cắt đường tròn (C) tại hai điểm hoặc tiếp xúc với đường tròn (C) .

GV: Có thể nghĩ đến điểm cần tìm - một điểm đặc biệt của đường tròn (C) là điểm nào?

HS: Điểm đó có thể là tiếp điểm T của đường tròn (AMB) và đường tròn (C) .

GV: Hãy chứng minh hoặc bác bỏ nhận định đó.

HS: Gọi N là giao điểm của AM và đường tròn (ATB) , ta có góc ANB bằng góc ATB (cùng chắn một cung), góc ATB bằng tổng hai góc AMB và MBN (góc ngoài tam giác), nên góc ATB lớn hơn góc AMB . Ta được điều phải chứng minh (Hình 5).

