SỬ DỤNG TƯƠNG TỰ GIỮA CÁC BÀI TOÁN ĐỂ BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC GIẢI TOÁN CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

PHAN ANH TÀI
Trường Đại học Sài Gòn
Email: phananhtai@sgu.edu.vn

Tóm tắt: *Trong dạy học Toán ở trường phổ thông, một trong các dạng hoạt động giải toán là từ bài toán cần giải liên tưởng với một bài toán tương tự đã có cách giải để phát hiện cách giải bài toán đã cho. Bài viết đề cập đến cách nhận biết sự tương tự giữa các bài toán của một số dạng toán trong chương trình Trung học phổ thông để tổ chức hoạt động giải toán. Để tìm cách giải bài toán, học sinh phải nhận biết bài toán tương tự gồm 3 dạng: Bài toán có tính chất tương tự; Bài toán có cấu trúc tương tự; Bài toán có dấu hiệu tương tự không tường minh. Qua đó, năng lực giải toán của học sinh được bồi dưỡng trong dạy học toán ở trường phổ thông.*

Từ khóa: *Tương tự; năng lực giải toán; học sinh; trung học phổ thông.*

(Nhận bài ngày 08/11/2016; Nhận kết quả phản biện và chỉnh sửa ngày 18/01/2017; Duyệt đăng ngày 25/02/2017).

1. Đặt vấn đề

Hoạt động giải toán (HĐGT) cùng với việc sử dụng "vốn" kiến thức, kĩ năng; người giải toán thường "huy động" hệ thống tri thức phương pháp và hệ thống các bài toán đã được "phương pháp hóa" để giải quyết vấn đề. Dạy học (DH) Toán ở trường phổ thông, một trong các dạng HĐGT, là từ bài toán cần giải liên tưởng với một bài toán tương tự đã có cách giải để phát hiện cách giải. Trong bài viết này, chúng tôi đề cập đến cách nhận biết sự tương tự giữa các bài toán của một số dạng toán trong chương trình Trung học phổ thông để tổ chức HĐGT.

2. Tương tự và phân loại tương tự

2.1. Khái niệm tương tự

Theo G. Polya "Tương tự là một kiểu giống nhau nào đó... nhưng ở mức độ xác định hơn, và ở mức độ được phản ánh bằng khái niệm... Những đối tượng giống nhau phù hợp với nhau trong một quan hệ nào đó". Diễn giải rõ hơn, tác giả viết: "Hai hệ là tương tự nếu chúng phù hợp với nhau trong các mối quan hệ xác định rõ ràng giữa những bộ phận tương ứng" [1, tr.20].

Ở phương diện cấu trúc, D. Gentner cho rằng: "Tương tự là một từ một cấu trúc, cơ sở hoặc nguồn đến một cấu trúc khác hay mục tiêu hệ thống" [2, tr.20]. Về phương diện logic, Nguyễn Phú Lộc cho rằng: "tương tự là suy luận trong đó kết luận về sự giống nhau của các dấu hiệu khác của các đối tượng" [3, tr.82 - 83].

Từ lí luận trên, chúng tôi quan niệm: Tương tự là suy luận dựa vào dấu hiệu giống nhau của đối tượng mục tiêu (được suy ra hoặc phát hiện) và đối tượng cơ sở (đã được biết đến hoặc đã hiểu). Trong DH Toán, hai vấn đề được xem là tương tự nếu chúng có cùng tính chất hay có vai trò như nhau hay giữa các bộ phận tương ứng của chúng có mối quan hệ giống nhau ở một số dấu hiệu.

2.2. Phân loại tương tự

Theo Nguyễn Phú Lộc, tương tự được chia làm 2 loại:

a. Tương tự theo thuộc tính: Khi dấu hiệu được rút ra trong kết luận biểu thị thuộc tính. Tương tự theo thuộc tính có cấu trúc như sau:

A và B có cùng tính chất $P_1, P_1, ..., P_n$. A có tính chất P_{n+1}.	→	B có tính chất P_{n+1} ?

Sơ đồ 1: Tương tự theo thuộc tính

b. Tương tự theo quan hệ: Khi dấu hiệu được rút ra trong kết luận biểu thị quan hệ. Tương tự theo quan hệ có cấu trúc như sau:

A và B có cùng loại (hay cùng cấu trúc tương tự) A có quan hệ với C	→	B có quan hệ với C ?

Sơ đồ 2: Tương tự theo quan hệ

3. Nhận biết bài toán tương tự để tổ chức hoạt động giải toán

3.1. Các bài toán có tính chất tương tự

Một số bài toán tuy nội dung khác nhau nhưng chúng có tính chất tương tự nhau. Để tìm cách giải một bài toán; tìm hiểu, phân tích giả thiết và kết luận của bài toán này, người giải liên tưởng đến bài toán có tính chất tương tự với bài toán đã cho. Từ cách giải của nó định hướng phát hiện cách giải bài toán.

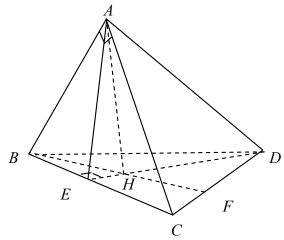
Ví dụ: Cho tứ diện *ABCD* có các cạnh *AB, AC, AD* đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh

$$S_{BCD}^2 = S_{ABC}^2 + S_{ACD}^2 + S_{ABD}^2 \quad (1)$$

Tứ diện *ABCD*, $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$.

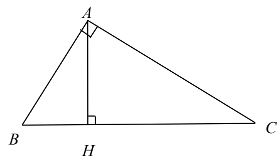
Gọi H là hình chiếu của A trên mp*(BCD)* (Hình 1).

Hệ thức (1) gợi sự "liên tưởng" tới Định lí Pitago trong tam giác vuông (có nhiều phương pháp chứng minh). Cần lưu ý HS, "liên tưởng" tương tự giữa tính chất của bài toán hình học không gian và bài toán hình học phẳng có thể là sự "liên tưởng" về cách giải quyết vấn đề.



Hình 1

Một trong các phương pháp chứng minh Định lí Pitago là sử dụng tam giác đồng dạng. Xét tam giác vuông *ABC*, đường cao *AH* (Hình 2). Từ hai tam giác vuông đồng dạng *AHB* và *CAB*, ta có



Hình 2

$$\frac{AB}{HB}=\frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH.BC \quad (2)$$

Tương tự ta có $AC^2 = HC.BC \quad (3)$

Cộng (2) và (3), ta có

$$AB^2 + AC^2 = BH.BC + HC.BC = BC^2 \quad (4)$$

"Liên tưởng" tới phương pháp trên đây để chứng minh hệ thức (1), từ giả thiết ta có tam giác *EAD* vuông tại *A*, có đường cao *AH* (Hình 1), ta có $EA^2 = EH.ED$

nên $\frac{1}{4}BC^2.EA^2 = \frac{1}{4}BC^2.EH.ED$

hay $\left(\frac{1}{2}BC.EA\right)^2 = \left(\frac{1}{2}BC.EH\right).\left(\frac{1}{2}BC.ED\right)$

do đó $\quad S^2_{ABC} = S_{BHC}.S_{BCD} \quad (5)$

Rõ ràng có sự tương tự giữa hệ thức (5) và hệ thức (2). Hơn nữa, để có hệ thức (5), ta đã sử dụng hệ thức (2) trong chứng minh.

Chứng minh tương tự, ta có $S^2_{ACD} = S_{HDC}.S_{BCD}$

và $S^2_{ADB} = S_{HDB}.S_{BCD}$

Khi đó,

$$S^2_{ABC} + S^2_{ACD} + S^2_{ABD} = S_{BHC}.S_{BCD} + S_{HDC}.S_{BCD} + S_{HDB}.S_{BCD}$$
$$= S^2_{BCD}$$

Vậy hệ thức (1) được chứng minh.

3.2. Các bài toán có cấu trúc tương tự

Sự tương tự của các bài toán có thể nhận biết được ở dấu hiệu cấu trúc của chúng. Một bài toán có cấu trúc tương tự với một bài toán khác gợi cho người giải liên tưởng tới phương pháp giải bài toán này để tìm hướng giải bài toán đã cho.

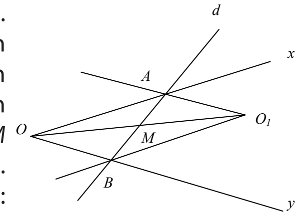
Ví dụ 1: Cho góc tam diện *(Oxyz)* và điểm G thuộc miền trong góc tam diện. Dựng mặt phẳng α qua *G* và lần lượt cắt *Ox, Oy, Oz* tại *A, B, C* sao cho *G* là trọng tâm của tam giác *ABC*.

Cấu trúc của bài toán không gian, gợi liên tưởng tới cấu trúc bài toán phẳng sau:

Bài toán 1: Cho góc *xOy* và điểm *M* thuộc miền trong góc đó. Dựng đường thẳng *d* qua *M* và lần lượt cắt *Ox, Oy* tại *A, B* sao cho *M* là trung điểm của đoạn *AB*.

Giải bài toán phẳng theo các cách sau:

Cách giải 1 (Hình 3) Phân tích: Giả sử đã dựng đường thẳng *d* thỏa mãn bài toán. Khi đó ta xem *A, B* là hai đỉnh đối diện của hình bình hành OAO_1B và *M* là tâm của hình bình hành OAO_1B. Suy ra *M* là trung điểm của *AB* và OO_1.



Hình 3

Từ đó, suy ra cách dựng:

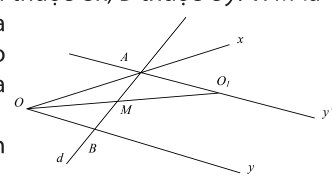
- Dựng OO_1 nhận *M* làm trung điểm.

- Qua O_1 dựng các đường thẳng lần lượt song song với *Ox* cắt *Oy* tại *B* và song song với *Oy* cắt *Ox* tại *A*.

- Đường thẳng phải dựng *d* đi qua *A, B*.

Cách giải 2 (Hình 4)

Phân tích: Xét phép đối xứng tâm *M*, ký hiệu D_M. Qua D_M, *O* có ảnh là O_1. Theo giả thiết *d* lần lượt cắt *Ox* tại *A*, cắt *Oy* tại *B* suy ra *A* thuộc *Ox*, *B* thuộc *Oy*. Vì *M* là trung điểm của *AB* suy ra *A* là ảnh của *B* qua D_M do đó *A* thuộc O_1y' là ảnh của *Oy* qua D_M.



Hình 4

Từ đó ta có cách dựng:

- Dựng O_1 là ảnh của *O* qua D_M,

- Dựng O_1y' là ảnh của *Oy* qua D_M,

- *A* là giao điểm của *Ox* và O_1y',

- Đường thẳng *d* qua *A, M*.

Bài toán phẳng tổng quát của bài toán 1:

Cho góc *xOy* và điểm *M* bất kì. Dựng đường thẳng *d* qua *M* và lần lượt cắt *Ox, Oy* tại *A, B* sao cho $\frac{MA}{MB} = k > 0$.

Từ cách giải 2 của bài toán 1 gợi cho ta cách giải bài toán tổng quát:

Phân tích: Giả sử *M* thuộc miền trong góc *xOy*, xét phép vị tự tâm *M* tỉ số *-k*, ký hiệu V_M^{-k}. Qua V_M^{-k}, *O* có ảnh là O_1.

Theo giả thiết *d* lần lượt cắt *Ox* tại *A*, cắt *Oy* tại *B* suy ra *A* thuộc *Ox*, *B* thuộc *Oy*. Vì $\frac{MA}{MB} = k > 0$, suy ra *A* là ảnh của *B* qua V_M^{-k} do đó *A* thuộc O_1y' là ảnh của *Oy* qua V_M^{-k}.

Từ đó ta có cách dựng:

- Dựng O_1 là ảnh của *O* qua V_M^{-k},

- Dựng O_1y' là ảnh của *Oy* qua V_M^{-k},
- Điểm *A* là giao điểm của *Ox* và O_1y',
- Đường thẳng *d* qua *A, M*.

Tương tự *M* thuộc miền ngoài góc *xOy*, khi đó ta xét phép vị tự tâm *M* tỉ số *k*.

Xét quan hệ tương tự giữa cấu trúc của bài toán hình học không gian trong ví dụ 1 và các bài toán 1 và bài toán tổng quát của hình học phẳng:

Bài toán hình học không gian (Ví dụ 1)	**Bài toán 1 hình học phẳng**
Góc tam diện *(Oxyz)*	Góc *xOy*
G thuộc miền trong góc tam diện	M thuộc miền trong góc
Dựng mặt phẳng (α) qua *G* và lần lượt cắt *Ox, Oy, Oz* tại *A, B, C*	Dựng đường thẳng *d* qua *M* và lần lượt cắt *Ox, Oy* tại *A, B*
G là trọng tâm của tam giác *ABC*	*M* là trung điểm của đoạn *AB*

Từ đó có thể thực hiện các cách giải sau:

Cách giải 1 (Hình 5):
- Xác định mặt phẳng *(Oy, Oz)*,
- Xác định mặt phẳng *(G, Ox)*,

Hai mặt phẳng này có điểm chung *O*, gọi *Ot* là giao tuyến của chúng. Khi đó, *G* thuộc miền trong góc *xOt*.

- Trong mặt phẳng *(G, Ox)*, qua *G* dựng đường thẳng *d* cắt *Ox* tại *A* và cắt *Ot* tại *M* sao cho $\frac{GM}{GA}=\frac{1}{2}$ (đây chính là bài toán phẳng tổng quát)
- Trong miền góc *yOz* chứa điểm *M*, dựng dường thẳng *d'* qua *M*, cắt *Oy* tại *B*, cắt *Oz* tại *C*, sao cho *M* là trung điểm của *BC* (đây là bài toán 1 ta đã liên tưởng tới)
- Mặt phẳng (α) qua *A, B, C*.

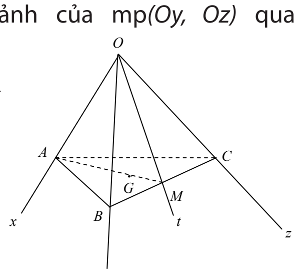
Cách giải 2: Vận dụng cách giải bài toán phẳng tổng quát vào bài toán không gian của ví dụ 1 (Hình 6)

Phân tích: Giả sử đã dựng được mặt phẳng (α) thỏa mãn điều kiện bài toán, gọi *M* là trung điểm của *BC* suy ra *M* thuộc mặt phẳng *(Oy, Oz)*. Theo giả thiết, *G* là trọng tâm của tam giác *ABC* suy ra *A* là ảnh của *M* qua phép vị tự tâm G, tỉ số -2, kí hiệu V_G^{-2}. Do đó, *A* thuộc mặt phẳng (β) là ảnh của mặt phẳng *(Oy, Oz)* qua V_G^{-2}.

Từ đó, ta có cách dựng:
- Dựng mp (β) là ảnh của mp*(Oy, Oz)* qua V_G^{-2},
- *A* là giao điểm của *Ox* và mp (β).

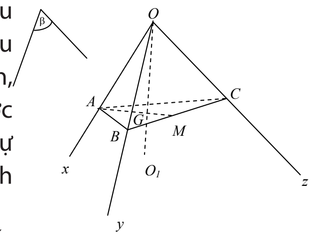
Tương tự ta dựng các điểm *B, C*.

Mặt phẳng (α) qua ba điểm *A, B, C*.



Hình 6

Chú ý: Không phải mọi bài toán tương tự thì có cách giải giống nhau. Hiểu rõ điều này để khi thấy dấu hiệu tương tự của bài toán, người giải phải nhìn được bản chất của sự tương tự mới định hướng đúng cách giải.



Hình 6

3.3. Bài toán có dấu hiệu tương tự không tường minh

Một số bài toán thoạt nhìn không dễ thấy sự tương tự của nó với một bài toán đã có cách giải. Trong trường hợp này, dấu hiệu tương tự của bài toán không được tường minh. Phải thật "tinh" người giải toán mới phát hiện dấu hiệu tương tự (ẩn tàng) của nó với một bài toán đã có cách giải, từ đó định hướng cách giải của bài toán (độ "tinh" có được nhờ rèn luyện giải nhiều bài toán).

Ví dụ 2 : Cho hàm số

$$y=\frac{4}{3}x^3-2(\sin a-\cos a)x^2-3(\sin 2a)x+1$$

Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm cực trị của hàm số, tìm các giá trị của *a* sao cho $x_1+x_2=x_1^2+x_2^2$ (1).

Đây là một bài toán giải tích, về tính chất hay cấu trúc, mới gặp lần đầu ta khó thấy nó tương tự với một bài toán (hay dạng toán) nào đó. Nhưng nhìn kĩ ta sẽ thấy dấu hiệu tương tự nằm ở hệ thức $x_1+x_2=x_1^2+x_2^2$ (tương tự theo thuộc tính). Ta liên tưởng đến bài toán phương trình bậc hai có hai nghiệm thỏa mãn một hệ thức đối xứng và cách giải là sử dụng định lí Vi - ét. Từ đó, ta có cách giải bài toán như sau:

Từ giả thiết x_1, x_2 là hoành độ các điểm cực trị của hàm số nên chúng là hai nghiệm phân biệt của phương trình $y'=0$ (2).

Ta có $y'=4x^2-4(\sin a-\cos a)x-3\sin 2x$.

$\Delta'=4(\sin a-\cos a)^2+12\sin 2a$

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta'>0$

$\Leftrightarrow 1+\sin 2a>0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\sin 2a\le 1$ (3)

và $x_1+x_2=\sin a-\cos a,\ x_1x_2=-\frac{3}{4}\sin 2a$.

Đặt $u=\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)$

với $-\sqrt{2}\le u\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin 2a = 1 - u^2$

Khi đó, $(1)\Leftrightarrow x_1+x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$$\Leftrightarrow \sin a - \cos a = (\sin a - \cos a)^2 + \frac{3}{2}\sin 2a$$

$$\Leftrightarrow u^2 + 2u - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = -3 \end{array}\right.$$

Nghiệm *u = 1* thỏa mãn điều kiện của *u*.

Do đó, $\sqrt{2}\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ a_2 = (2l+1)\pi \end{array}\right. \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$ thỏa mãn điều kiện (3).

3. Kết luận

Trong DH Toán, GV cần rèn luyện cho HS về các quan hệ giữa tình huống được xét và "vốn" kiến thức, kĩ năng, tri thức phương pháp, tri thức các bài toán đã có ở HS. Năng lực giải toán phụ thuộc nhiều vào "chất lượng" dữ liệu trong "vốn" kiến thức, kĩ năng, tri thức phương pháp mà người giải toán đã tích lũy được. Hơn nữa, chính sự tích lũy lâu dài về "lượng" các dữ liệu tạo tiền đề cho sự phát triển trực giác xác lập các "liên tưởng" nhanh chóng, hiệu quả trong giải quyết các tình huống mới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. G. Polya (Hoàng Chúng, Lê Đình Phi, Nguyễn Hữu Chương, Hà Sĩ Hồ dịch), (2010), *Toán học và những suy luận có lí*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[2]. Bùi Phương Uyên, (2016), *Suy luận tương tự trong dạy học môn Toán trung học phổ thông: Nghiên cứu trường hợp Phương pháp tọa độ trong không gian*, Luận án tiến sĩ khoa học giáo dục, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh.

[3]. Nguyễn Phú Lộc, (2010), *Dạy học hiệu quả môn Giải tích trong trường phổ thông*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[4]. Nguyễn Bá Kim, (2006), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm.

[5]. Bùi Văn Nghị, (2009), *Vận dụng lí luận vào thực tiễn dạy học môn Toán ở trường phổ thông,* NXB Đại học Sư phạm.

[6]. Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên) - Văn Như Cương (chủ biên) - Phạm Khắc Ban - Tạ Mân, (2007), *Hình học nâng cao 11*, NXB Giáo dục.

[7]. Đào Tam, (2004), *Phương pháp dạy học hình học ở trường trung học phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm.

USING SIMILAR FEATURES AMONG MATHS EXERCISES TO FOSTER STUDENTS' DOING MATHS COMPETENCE IN TEACHING MATHS AT HIGH SCHOOLS

Phan Anh Tai
Saigon University
Email: phananhtai@sgu.edu.vn

Abstract: *In teaching Mathematics at high school, one of doing Maths activities is to associate that exercise with a similar one with given solution to find out the answer. The article refers ways to recognize the similarity among Maths exercises in several forms at high school curriculum in order to organize solving activities. To find ways to do these exercises, students have to realize similar exercise, including 3 types: exercise with similar features; exercise with similar structure; exercise with implicit similar signals. Thereby, students' competence to do Maths exercise will be improved when being fostered in teaching Maths at high schools.*

Keywords: *Similarity; competence to do Maths exercise; students; high schools.*