

RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG QUA VIỆC VẬN DỤNG PHÉP BIẾN HÌNH

ĐỖ THỊ TRINH

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên
Email: dothittrinh@gmail.com

Tóm tắt: Rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh là một trong những việc làm quan trọng của người giáo viên nhằm nâng cao chất lượng dạy - học ở trường phổ thông. Trong bài, tác giả đề cập tới việc rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh bằng phương pháp biến hình. Việc thực hiện quy trình dạy học giải bài tập toán học thường được tiến hành theo bốn bước: Tìm hiểu nội dung bài toán; Xây dựng chương trình giải; Trình bày lời giải; Kiểm tra và nghiên cứu lời giải. Qua các ví dụ minh họa cho thấy việc rèn luyện cho học sinh kĩ năng giải toán nói chung và kĩ năng giải các bài toán hình học nói riêng là một trong những yêu cầu quan trọng, cần thiết đối với mỗi giáo viên để góp phần nâng cao hiệu quả dạy - học môn Toán ở trường phổ thông.

Từ khóa: Kĩ năng; kĩ năng giải toán; phép biến hình.

(Nhận bài ngày 28/12/2016; Nhận kết quả phản biện và chỉnh sửa ngày 10/01/2017; Duyệt đăng ngày 25/01/2017).

1. Đặt vấn đề

Một bài toán Hình học có thể giải được bằng những cách khác nhau. Tuy nhiên, trước một bài toán mới về Hình học, ta nên xem xét lựa chọn phương pháp giải thích hợp để có kết quả nhanh, gọn nhất. Để giải một bài toán Hình học bằng phương pháp biến hình (PPBH), trước hết ta phải nhận ra được dấu hiệu của lớp các bài toán có khả năng giải được bằng phương pháp này không. Câu hỏi đặt ra là: Làm thế nào để nhận biết được một bài toán Hình học có khả năng giải được bằng PPBH?

Cơ sở của việc sử dụng phép biến hình vào mỗi bài toán là trong dữ kiện của bài toán và trong tính chất của hình đòi hỏi phải thiết lập (chứng minh) hoặc trong điều kiện đòi hỏi ở hình cần dựng đã xuất hiện những yếu tố có mối liên hệ đến một phép biến hình cụ thể nào đó. Muốn nhận biết được một bài toán Hình học có khả năng giải được bằng PPBH, ta phải xem xét, phân tích nội dung bài toán để tìm ra yếu tố có mối liên hệ đến một phép biến hình cụ thể. Sau đó, vận dụng các tính chất của phép biến hình này tìm ra lời giải hay đáp số của bài toán được xét.

Đặc biệt cần lưu ý PPBH thường gặp và sử dụng trong việc giải một bài toán quỹ tích hay bài toán dựng hình, nhất là bài toán dựng hình. Theo quan điểm lí thuyết tập hợp, hình được hiểu là một tập hợp điểm nào đó. Việc sử dụng một hình học nào đó quy về dựng một số điểm hữu hạn để xác định cũng có nghĩa là đủ để tạo nên hình đó. Trong mặt phẳng thông thường, một điểm được xác định bởi giao điểm của hai đường, trong đó có đường thẳng và đường conic mà đường tròn là một elip đặc biệt. Trong hai đường dùng để xác định điểm phải dựng là một trong các giao điểm của chúng, thường thì một đường đã có sẵn trong dữ kiện của bài toán còn

đường thứ hai là quỹ tích của những điểm có một tính chất đặc trưng hình học và được suy ra từ một đường đã cho trong dữ kiện bởi một phép biến hình. Bài báo này, chúng tôi đề cập tới việc rèn luyện kĩ năng (KN) giải toán cho học sinh (HS) bằng PPBH.

2. Rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh phổ thông qua việc vận dụng phép biến hình

2.1. Quy trình dạy học giải bài tập toán học theo tư tưởng của G.Polya

Trong chương trình môn Toán ở trường phổ thông, nhiều bài tập toán chưa có hoặc không có thuật giải và cũng không có một thuật giải tổng quát nào để giải tất cả các bài toán. Chúng ta chỉ có thể thông qua việc dạy học giải một số bài toán cụ thể để dẫn truyền thụ cho HS cách thức, kinh nghiệm trong việc suy nghĩ, tìm tòi lời giải cho mỗi bài toán. Dạy học giải bài tập toán không có nghĩa là giáo viên (GV) cung cấp cho HS lời giải bài toán. Biết lời giải bài toán không quan trọng bằng làm thế nào để giải được bài toán, vì vậy cần trang bị những hướng dẫn chung, gợi ý các suy nghĩ tìm tòi, phát hiện cách giải bài toán là cần thiết. Dựa trên những tư tưởng tổng quát cùng với những gợi ý chi tiết của G.Polya về cách thức giải toán, phương pháp tìm tòi lời giải cho một bài toán thường được tiến hành theo bốn bước sau [1]:

- Bước 1: *Tìm hiểu nội dung bài toán:* Để tìm hiểu nội dung của bài toán, cần chú ý các yếu tố cơ bản như: Phân biệt cái đã cho, cái phải tìm và cái phải chứng minh; Dùng công thức, kí hiệu, hình vẽ... để diễn tả đề bài; Phân biệt các thành phần khác nhau của điều kiện; Có thể diễn tả các điều kiện đó thành công thức không?...

- Bước 2: *Xây dựng chương trình giải:* Yếu tố quan trọng khi giải được bài toán là việc xây dựng chương trình giải cho bài toán đó. Vì vậy, khi thực hiện, GV cần chú ý: Phân tích bài toán đã cho thành nhiều bài toán đơn giản



quen thuộc; Lựa chọn những kiến thức đã học gần gũi hơn cả với dữ kiện của bài toán rồi dự đoán kết quả; Sử dụng những phương pháp đặc thù với từng dạng toán như chứng minh, toán dựng hình, toán quỹ tích,...

- Bước 3: *Trình bày lời giải*: Trình bày lại lời giải sau khi đã điều chỉnh những chỗ cần thiết.

- Bước 4: *Kiểm tra và nghiên cứu lời giải*: Kiểm tra lại kết quả và các lập luận trong quá trình giải; Nhìn lại toàn bộ các bước giải, rút ra tri thức phương pháp để giải một bài toán; Tìm thêm cách giải khác (nếu có thể); Khai thác kết quả có thể có của bài toán; Đề xuất bài toán tương tự, bài toán đặc biệt hoặc khái quát hoá bài toán...

2.2. Ví dụ rèn luyện rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh phổ thông qua việc vận dụng phép biến hình

Sau đây là một số ví dụ chúng tôi thiết kế dựa theo quy trình 4 bước giải một bài toán của Polya nhằm rèn luyện KN giải toán cho HS thông qua việc vận dụng phép biến hình.

Ví dụ: Xét bài toán: Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của $\triangle ABC$. Gọi I_1, I_2 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AB'C', \triangle BA'C'$. Chứng minh rằng $I_1 I_2 = \frac{1}{2} AB$.

Hoạt động 1: Tìm hiểu nội dung bài toán

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
- Yêu cầu HS ghi giả thiết, kết luận và vẽ hình (Hình 1) - Xác định các yếu tố đã cho, không đổi và yếu tố cần chứng minh	- Ghi giả thiết, kết luận và vẽ hình - Các yếu tố đã cho là $\triangle ABC$ có A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AB'C', \triangle BA'C'$ - Yếu tố cần chứng minh là $I_1 I_2 = \frac{1}{2} AB$

Hoạt động 2: Xây dựng chương trình giải

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
- Nhận xét đặc điểm của $\triangle AB'C', \triangle BA'C'$? - Do $\triangle AB'C' = \triangle BA'C'$ nên tồn tại phép biến hình nào biến tam giác này thành tam giác kia không? - Do $T_{AC'}: \triangle AC'B' \rightarrow \triangle C'BA'$ và I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AB'C', \triangle BA'C'$ thì I_1, I_2 có là ảnh của nhau qua phép biến hình nào không? - Theo định nghĩa phép tịnh tiến, ta có đẳng thức nào? - Vậy mối quan hệ giữa I_1, I_2 và AB như thế nào?	- $\triangle AB'C' = \triangle BA'C'$ - $T_{AC'}: \triangle AC'B' \rightarrow \triangle C'BA'$ - $T_{AC'}: I_1 \rightarrow I_2$ $I_1 I_2 = AC'$ $I_1 I_2 = \frac{1}{2} AB$

Hoạt động 3: Thực hiện chương trình giải

Do A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB nên qua phép tịnh tiến theo véc tơ

$\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ các điểm A, C', B'

lần lượt biến thành các điểm C', B, A'

Do đó, qua phép tịnh tiến theo véc tơ

$\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ $\triangle AC'B'$ biến thành

$\triangle C'BA'$.

=> Qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ tâm I_1

đường tròn nội tiếp của $\triangle AC'B'$ biến thành tâm I_2 đường tròn nội tiếp của $\triangle C'BA'$.

Do đó, ta có $I_1 I_2 = \frac{1}{2} AB$.

Hoạt động 4: Kiểm tra và nghiên cứu lời giải

1) Hướng dẫn HS giải bài toán bằng cách khác: Cách 2 (Sử dụng phương pháp tổng hợp)

Do A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của $\triangle ABC$ nên ta có $\triangle AC'B' = \triangle C'BA'$.

Do I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các $\triangle AB'C', \triangle BA'C'$ nên ta có $AI_1 \parallel C'I_2$ và $BI_2 \parallel C'I_1 \Rightarrow \triangle AC'I_1 = \triangle C'BI_2$.

Do đó, ta có $AI_1 = C'I_2$.

=> $AI_1 I_2 C'$ là hình bình hành.

Do đó $I_1 I_2 = AC' \Rightarrow I_1 I_2 = \frac{1}{2} AB$.

2) Từ bài toán trên, nếu gọi I_3 là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle A'B'C'$ (Hình 2)

Theo chứng minh trên, ta có:

$AC' = C'B = B'A' = I_1 I_2$;

$AB' = B'C = C'A' = I_1 I_3$;

$BA' = A'C = C'B' = I_2 I_3$.

Do đó

$\triangle AC'B' = \triangle C'BA' = \triangle B'A'C' = \triangle A'B'C' = \triangle I_1 I_2 I_3$,

=> $S_{AC'B'} = S_{C'BA'} = S_{B'A'C'} = S_{A'B'C'} = S_{I_1 I_2 I_3}$.

Do đó, ta có $S_{I_1 I_2 I_3} = \frac{1}{4} S_{ABC}$.

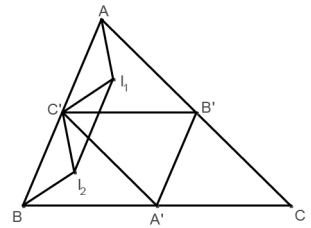
Mặt khác, theo chứng minh bài toán gốc, ta có $C'I_2 = B'I_3$ và $C'I_1 = A'I_3$.

Ta có $\triangle C'I_2 I_1 = \triangle I_3 B'A'$.

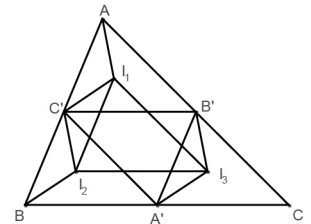
Do đó, ta có kết quả bài toán 2 như sau:

Bài toán 2: Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của $\triangle ABC$. Gọi I_1, I_2, I_3 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $\triangle AB'C', \triangle BA'C', \triangle CA'B'$. Chứng minh rằng:

a) $S_{I_1 I_2 I_3} = \frac{1}{4} S_{ABC}$



Hình 1



Hình 2

b) $\Delta C'I_1I_2 = \Delta I_2B'A'$

c) $(AC'B) = (C'BA) = (B'A'C) = (A'B'C) = (I_1I_2I_3)$

3) Từ bài toán gốc, ta có phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AC'}}$:

$\Delta AC'B' \rightarrow \Delta C'BA'$ nên phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AC'}}$ sẽ biến các yếu

tố thuộc $\Delta AB'C'$ thành yếu tố tương ứng thuộc $\Delta C'BA'$.

Do đó, nếu trong các tam giác $\Delta AB'C'$, $\Delta BA'C'$, $\Delta CA'B'$ ta lần lượt thay các yếu tố I_1, I_2, I_3 thành các yếu tố O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác này, ta có các kết quả tương tự như ở bài toán gốc và bài toán 2. Do đó, ta có kết quả là bài toán 3 như sau (Hình 3):

Bài toán 3: Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của ΔABC . Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $\Delta AB'C', \Delta BA'C', \Delta CA'B'$. Chứng minh rằng:

a) $AB = 2O_1O_2$

b) $S_{ABC} = 4S_{O_1O_2O_3}$

c) $(AC'B) = (C'BA) = (B'A'C) = (A'B'C) = (O_1O_2O_3)$

Từ bài toán 2 và bài toán 3, ta thu được kết quả bài toán 4 như sau:

Bài toán 4: Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của ΔABC . Gọi O_1, O_2, O_3 và I_1, I_2, I_3 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp các tam giác $\Delta AB'C', \Delta BA'C', \Delta CA'B'$. Chứng minh rằng $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$.

Ví dụ 1: Xét bài toán: Cho đường tròn $(O; R)$ và BC là dây cung cố định. Một điểm A di động trên đường tròn $(O; R)$. Tìm quỹ tích trực tâm H của ΔABC .

Để tổ chức dạy học cho HS, GV có thể hướng dẫn HS như sau:

Hoạt động 1: Tìm hiểu đề toán

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
- Yêu cầu HS ghi giả thiết, kết luận, vẽ hình bài toán - Xác định các yếu tố không đổi, yếu tố cố định, yếu tố sinh ra quỹ tích, yếu tố quỹ tích (Hình 4)	- Ghi giả thiết, kết luận và vẽ hình - Yếu tố cố định: Đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC - Yếu tố không đổi: Bán kính R - Yếu tố sinh ra quỹ tích: Điểm A - Yếu tố quỹ tích: Trực tâm H của ΔABC

Hoạt động 2: Xây dựng chương trình giải

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
- Dự đoán quỹ tích: Cho điểm A ở một số vị trí đặc biệt để xác định vị trí của điểm H (Hình 4)	- Dự đoán quỹ tích của điểm H khi điểm A thay đổi là thuộc loại tròn - Vẽ thêm đường kính CC' ; Do OI là đường trung bình của $\Delta CC'B$

- Nhận xét véc tơ $\overrightarrow{AH}$
- Nhận xét về mối quan hệ giữa điểm A và điểm H , từ đó xác định quỹ tích điểm H khi điểm A di động trên đường tròn $(O; R)$.

và $BC'AH$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$ (Hình 4)

- Do $T_{2\overrightarrow{OI}}: A \rightarrow H$ và quỹ tích điểm A là đường tròn $(O; R)$ nên quỹ tích H là đường tròn $(O'; R)$, là ảnh của đường tròn $(O; R)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OI}$

Hoạt động 3: Thực hiện chương trình giải

Gọi $C' = CO \cap (O)$, gọi I là trung điểm của BC (Hình 4). Do OI là đường trung bình của $\Delta CC'B$ nên $BC' = 2OI$. Do $BC'AH$ là hình bình hành nên ta có $BC' = AH$

$\Rightarrow AH = 2OI$ hay $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$

Do đó, ta có $T_{2\overrightarrow{OI}}: A \rightarrow H$. Do điểm A thuộc đường tròn $(O; R)$ nên quỹ tích điểm A là đường tròn $(O; R)$.

Suy ra, quỹ tích điểm H là đường tròn $(O'; R)$ là ảnh của đường tròn $(O; R)$ qua phép tịnh

tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OI}$.

Hoạt động 4: Kiểm tra và nghiên cứu lời giải

1) Hướng dẫn HS tìm cách giải khác: Cách 2 (sử dụng phép đối xứng tâm)

Gọi I là trung điểm cạnh BC , gọi $A' = AO \cap (O)$ (Hình 5)

Do $BH \parallel CA'$ và $CH \parallel BA'$ nên ta có $BHCA'$ là hình bình hành. Suy ra I là trung điểm của đoạn HA' .

$\Rightarrow \vec{O}I: A' \rightarrow H$.

Do điểm A thuộc đường tròn $(O; R)$ và $A' = AO \cap (O)$ nên khi điểm A chạy khắp đường tròn $(O; R)$ thì A' cũng chạy khắp đường tròn $(O; R)$. Suy ra, quỹ tích điểm A' là đường tròn $(O; R)$.

Suy ra quỹ tích H là đường tròn $(O'; R)$ là ảnh của đường tròn $(O; R)$ qua phép đối xứng tâm I .

Cách 3 (Sử dụng phép đối xứng trục).

Gọi $A_2 = AH \cap (O)$, $A_1 = AH \cap BC$. Do

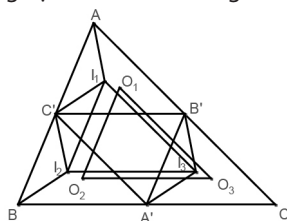
$\widehat{CBA_2} = \widehat{CAA_2} = \widehat{CBB_1}$ nên ΔHBA_2 có BA_1 vừa là đường phân giác, vừa là đường cao. Do đó, điểm H đối xứng với điểm A_2 qua đường thẳng BC .

Do điểm A thuộc đường tròn $(O; R)$ và $A_2 = AH \cap (O)$ nên khi điểm A chạy khắp đường tròn $(O; R)$ thì A_2 cũng chạy khắp đường tròn $(O; R)$. Suy ra, quỹ tích điểm A_2 là đường tròn $(O; R)$.

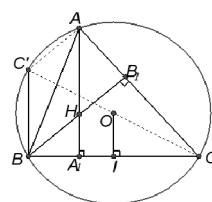
Suy ra, quỹ tích điểm H là đường tròn $(O'; R)$ là ảnh của đường tròn $(O; R)$ qua phép đối xứng trục BC .

2) Hướng dẫn HS sáng tạo bài toán mới

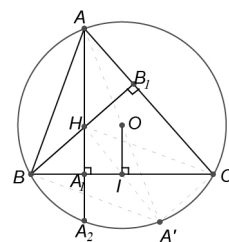
- Từ lời giải cách thứ 2 ta thấy, khi điểm A chạy khắp



Hình 3



Hình 4



Hình 5



đường tròn $(O; R)$ thì điểm A' luôn thuộc đường tròn $(O; R)$. Do đó, ta có bài toán 5 như sau:

Bài toán 5: Cho đường tròn $(O; R)$ với BC là dây cung cố định và A là điểm di động trên đường tròn $(O; R)$. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$ và A' là điểm đối xứng với H qua trung điểm đoạn thẳng BC . Chứng minh rằng A' thuộc một đường tròn cố định.

- Từ lời giải cách thứ 3 ta thấy: Do $\mathcal{D}_{BC}: H \rightarrow A'$ nên $\mathcal{D}_{BC}: \triangle BHC \rightarrow \triangle BA'C$.

Suy ra, ta có $\mathcal{D}_{BC}: (BHC) \rightarrow (BA'C)$ hay ta có $(BHC) = (O)$.

Do đó, ta có bài toán 6 như sau:

Bài toán 6: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng $(O) = (BHC) = (BHA) = (AHC)$.

- Từ lời giải cách 3, ta có $\mathcal{D}_{BC}: (BHC) \rightarrow (BA'C)$. Suy ra $\mathcal{D}_{BC}: O_1 \rightarrow O$, với O, O_1 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BA'C, \triangle BHC$. Do đó, ta có I là trung điểm của OO_1 , với I là trung điểm của BC .

Với vai trò tương tự, ta có: Với J, K lần lượt là trung điểm của AC, AB và O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AHC, \triangle AHB$ thì J, K lần lượt là trung điểm của OO_2, OO_3 .

Do đó, ta có $AB = O_1O_2, O_2O_3 = BC$ và $O_3O_1 = AC$.

Do đó, ta có bài toán 7 như sau:

Bài toán 7: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và H là trực tâm của tam giác ABC . Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHC, \triangle AHC, \triangle AHB$.

a) Chứng minh rằng $\triangle ABC = \triangle O_1O_2O_3$.

b) Khi BC cố định và A chuyển động trên đường tròn (O) , chứng minh rằng O_1 cố định, O_2 và O_3 chuyển động trên một đường tròn cố định.

3. Kết luận

Việc rèn luyện cho HS KN giải toán nói chung và KN giải các bài toán Hình học nói riêng là một trong những yêu cầu quan trọng và cần thiết đối với GV. Đặc biệt, nếu giúp HS biết vận dụng phép biến hình trong giải toán thì không chỉ giúp các em hiểu rõ hơn nội dung các kiến thức về phép biến hình mà còn phát triển được năng lực giải toán Hình học cho HS, từ đó góp phần nâng cao hiệu quả dạy - học môn Toán ở trường phổ thông.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. G.Polya, (1997), *Giải một bài toán như thế nào*, Hồ Thuần - Bùi Tường dịch, NXB Giáo dục.
- [2]. Trần Việt Cường - Nguyễn Danh Nam, (2013), *Giáo trình Hình học sơ cấp*, NXB Giáo dục Việt Nam.
- [3]. Bùi Văn Nghị, (2009), *Vận dụng lý luận vào thực tiễn dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
- [4]. Bùi Văn Nghị - Đỗ Thị Trinh - Nguyễn Tiến Trung - Hoàng Ngọc Anh, (2016), *Phát triển năng lực sư phạm cho sinh viên đại học ngành sư phạm Toán*, NXB Giáo dục Việt Nam.
- [5]. G.Polya, (1997), *Sáng tạo toán học*, Nguyễn Sỹ Tuyển - Phan Tất Đắc - Hồ Thuần (dịch), NXB Giáo dục.

PRACTISING STUDENTS' SKILL AT DOING MATHS BY APPLYING TRANSFIGURATION METHOD

Do Thi Trinh

Thai Nguyen University of Education

Email: dothittrinh@gmail.com

Abstract: Practising students' skill at doing Maths is an important task of teachers in order to improve teaching - learning quality at general schools. The author refers to practising students' skill at doing Maths by transfiguration with 4 steps: Find out content of exercise; Develop solving process; Present solution; Check and research solutions. Through illustration, we can see that this practice in general Maths solving and skills at doing Geometry in particular is one of key requirements, it is necessary for each teacher to contribute improving the efficiency of Maths teaching at general school.

Keywords: Skill; skill at doing Maths; transfiguration.