

# KHÁI QUÁT HÓA VÀ TRỪ TƯỢNG HÓA TRONG TOÁN CAO CẤP

NGUYỄN CHIẾN THẮNG - Trường Đại học Vinh  
Email: ncethang2009@gmail.com

LÊ THỊ NGỌC THÚY - Trường Cao đẳng Sư phạm Nghệ An  
Email: thuy76sp@gmail.com

**Tóm tắt:** Bài viết đề cập đến vấn đề khái quát hóa và trừ tượng hóa trong Toán cao cấp. Trong bài, tác giả phân tích: 1/ Các quá trình khái quát hóa và trừ tượng hóa khi hình thành kiến thức nói chung, khái niệm nói riêng trong Toán cao cấp; 2/ Những trở ngại và cách thức vượt qua khi tiến hành các quá trình đó; 3/ Cách tiếp cận sự phân loại khái quát hóa, trừ tượng hóa về mặt nhận thức và một số phương hướng nhằm phát triển từng loại khái quát hóa trong dạy học kiến thức Toán cao cấp ở bậc đại học. Theo tác giả bài viết, khái quát hóa và trừ tượng hóa được xem là hai thao tác quan trọng nhất trong quá trình hình thành các khái niệm Toán cao cấp. Chúng liên quan mật thiết với nhau và bổ sung cho nhau trong quá trình phát sinh, phát triển trí tuệ của người học, đặc biệt đối với sinh viên ngành Sư phạm Toán học ở bậc đại học. Có thể xem khái quát hóa là chặng đường mở đầu và trừ tượng hóa là chặng đường kết thúc trong hành trình tới chân lý của một kiến thức Toán cao cấp nói chung hay một khái niệm Toán học cao cấp nói riêng.

**Từ khóa:** Khái quát hoá; trừ tượng hoá; Toán cao cấp; sinh viên; đại học.

(Nhận bài ngày 30/03/2014; Nhận kết quả phản biện và chỉnh sửa ngày 15/04/2017; Duyệt đăng ngày 25/04/2017).

## 1. Đặt vấn đề

Toán cao cấp là lĩnh vực kiến thức thuộc khoa học cơ bản trong đào tạo giáo viên toán. Các kiến thức Toán cao cấp nói chung và các khái niệm trong chúng thường được hình thành dựa trên các thao tác khái quát hóa (generalization) và trừ tượng hóa (abstraction), vốn chưa thành thạo đối với hầu hết sinh viên những năm đầu bậc đại học. Vì vậy, họ thường nắm các khái niệm đó một cách hình thức, dễ quên và khó áp dụng. Mặt khác, tính hệ thống của các kiến thức đó sẽ không được xác lập hoặc dễ bị phá vỡ nếu các khái niệm cơ bản trong chúng không được gắn kết bởi các quá trình khái quát hóa và trừ tượng hóa.

Ở trong nước và trên thế giới, đã có nhiều công trình nghiên cứu về khái quát hóa và trừ tượng hóa trong quá trình phát sinh và phát triển trí tuệ của con người nói chung như các công trình của J. Piaget, V.V. Davydov,... hay trong giáo dục toán học như các công trình của Nguyễn Bá Kim, Hoàng Chúng,... Tuy nhiên, những công trình nghiên cứu vấn đề này trong lĩnh vực Toán học cao cấp chưa nhiều. Vì vậy, bên cạnh việc tìm hiểu những cách tiếp cận các khái niệm khái quát hoá và trừ tượng hoá về mặt lý luận, chúng tôi phát triển và củng cố các ý tưởng thu nhận được bởi nhiều ví dụ rút ra từ thực tiễn giảng dạy Toán cao cấp trong đào tạo sinh viên ngành Sư phạm Toán học.

## 2. Khái quát hóa và trừ tượng hóa

Khái quát hóa và trừ tượng hóa là hai thao tác quan trọng trong tư duy nói chung, tư duy toán học nói riêng của con người. Chúng có mối liên hệ mật thiết với nhau. Nhờ trừ tượng hóa, ta có thể khái quát hóa rộng hơn và do đó nhận thức sự vật, hiện tượng sâu sắc hơn.

Đây là cơ sở để hình thành các khái niệm bậc cao. Trong quá trình lĩnh hội toán học, đặc biệt là lĩnh vực Toán cao cấp, các thao tác này đóng vai trò chủ yếu khi xây dựng các khái niệm toán học.

Theo Nguyễn Bá Kim [1], *khái quát hoá* là chuyển từ một tập hợp đối tượng sang một tập hợp lớn hơn chứa tập hợp ban đầu bằng cách nêu bật một số đặc điểm chung của các phần tử trong tập hợp xuất phát. *Trừ tượng hoá* là tách những đặc điểm bản chất khỏi những đặc điểm không bản chất. Tất nhiên, sự phân biệt bản chất với không bản chất ở đây mang ý nghĩa tương đối, nó phụ thuộc mục đích hành động.

Theo Hoàng Chúng [2], *khái quát hoá* là dùng trí óc tách ra cái chung trong các đối tượng hoặc hiện tượng, sự kiện. Muốn khái quát hoá, thường phải so sánh nhiều đối tượng, hiện tượng, sự kiện với nhau. Trong quá trình đó, chúng ta gạt bỏ những thuộc tính khác của chúng, những thuộc tính phân biệt các đối tượng hay hiện tượng ấy với nhau, không nghĩ tới những thuộc tính đó mà chỉ khảo sát riêng những cái được tách ra; đó là quá trình *trừ tượng hoá*. Chẳng hạn, từ các trường hợp riêng:  $6 = 3 + 3$ ;  $10 = 3 + 7$ ;  $16 = 5 + 11$ ;  $20 = 7 + 13$ ,... ta có thể khái quát hoá rằng "mỗi số chẵn bằng tổng của hai số lẻ" hoặc "số chẵn lớn hơn 4 bao giờ cũng viết được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố lẻ".

Theo N.Hashemi [3], *khái quát hoá* có thể được xác định từ một quan điểm toán học với ý nghĩa là "tìm kiếm một hình ảnh lớn hơn", hay sự xem xét trên các nhóm hạn chế chuyển lên sự xem xét trên các nhóm lớn hơn, hoặc mở rộng khái niệm đến phạm vi lớn hơn để khám phá nó (Mason, Burton and Stacey, 2010). Theo quan điểm tâm lý học, *khái quát hoá* có nghĩa là "đưa ra cùng



câu trả lời cho những sự kích thích giống nhau” (Olson and Hergenhahn, 2010). Cũng có thể hiểu *khái quát hóa* là tìm kiếm các dạng mẫu, các mối quan hệ lớn hơn và tạo kết nối trong các mức khác nhau của tư duy toán học (Stacey, 2006; Mason, Burton and Stacey, 2010).

Theo M. Mitchelmore [4], bản chất của *tính trừu tượng* trong toán học chính là đặc trưng khép kín của nó, tách biệt khỏi thế giới vật chất và xã hội. Một đối tượng toán học trừu tượng chỉ có ý nghĩa ở trong hệ thống mà nó được xác định. Dĩ nhiên, như Sierpinski nhấn mạnh thì *trừu tượng hóa* trong toán học - xét ở mọi cấp độ - bao hàm việc lờ đi các đặc điểm nào đó và làm nổi bật các đặc điểm khác. Nhưng điều quan trọng là các đối tượng mới có liên hệ với nhau trong một hệ thống nhất quán có thể hoạt động mà không liên quan đến nghĩa trước đó của chúng.

Theo Nguyễn Phú Lộc [5], *trừu tượng hóa* là quá trình dùng trí óc để gạt bỏ những mặt, những thuộc tính, những liên hệ, quan hệ thứ yếu, không cần thiết và chỉ giữ lại những yếu tố cần thiết cho tư duy.

Nhà tâm lý học J. Piaget phân trừu tượng thành ba mức: *trừu tượng thực nghiệm*; *trừu tượng giả thực nghiệm* và *trừu tượng phản chiếu* [6].

- *Trừu tượng thực nghiệm* (empirical abstraction) là quá trình trừu tượng dựa trên các động tác thực để gây ra các hiện tính (vật tính và hoạt tính). So sánh các hiện tính đó, liên kết chúng để tạo ra các suy lý. Sự trừu tượng này được thực hiện không phải do sự vật hay động tác tự bộc lộ ra mà là do quá trình chủ thể đồng hóa chúng. Tuy nhiên, sự trừu tượng này mới chỉ diễn ra ở bên ngoài, chưa đi vào nội dung sự vật hay động tác.

- *Trừu tượng giả thực nghiệm* (pseudo-empirical abstraction) là trừu tượng không còn phải dựa trực tiếp vào những động tác trên vật thực của chủ thể, mà dựa vào các giả động tác đó. Những động tác này, một mặt vẫn phải dựa vào các vật cụ thể, nên nó vẫn mang tính chất thực nghiệm; mặt khác, những tính chất của thao tác không phải có sẵn trong sự vật, mà do hoạt động của chủ thể tạo ra. Vì vậy, nó có tính chất của sự trừu tượng phản chiếu. J. Piaget cho rằng loại trừu tượng này diễn ra mạnh nhất trong giai đoạn sơ đồ thao tác cụ thể.

- *Trừu tượng phản chiếu* (reflective abstraction) có nghĩa là thu nhận được tình trạng, ý nghĩa của sự phối trí (coordination) trong thao tác (hình thức và nội dung). Khái niệm phản chiếu có hai nội dung bổ sung cho nhau: chuyển hóa để chiếu lên mức cao hơn những phần tử (những thu nhận) rút ra được từ các mức trừu tượng trước; liên kết các phần tử đã được đưa lên, hòa nhập chúng với các phần tử ở cấp ấy đã có từ trước. Do sự chuyển hóa và liên kết này dẫn đến cải tổ lại, tổ chức lại, suy xét lại toàn bộ sơ đồ các phần tử ở mức cao. Sự cải tổ này đã tạo ra “trừu tượng suy lý”. Động tác đã trở thành thao tác.

Theo G. Harel [7], các nhà toán học và các nhà giáo

dục toán học sử dụng hai thuật ngữ *khái quát hóa* và *trừu tượng hóa* theo những sắc thái ý nghĩa khác nhau. Mỗi thuật ngữ đó đều biểu thị hai mặt: vừa là một quá trình, vừa là kết quả của quá trình đó.

**Ví dụ 1:** Từ các không gian vectơ hai chiều  $\mathbf{R}^2$  và ba chiều  $\mathbf{R}^3$  quen thuộc, chúng ta khái quát hóa thành không gian vectơ  $n$  chiều  $\mathbf{R}^n$  và trừu tượng hóa thành khái niệm không gian vectơ. Khi làm như vậy, hai đối tượng tinh thần khác nhau được sinh ra: Cái khái quát hóa  $\mathbf{R}^n$  và cái trừu tượng hóa  $\mathbf{V}$ , một không gian vectơ trên trường  $\mathbf{F}$  tùy ý.

Ở đây cần lưu ý rằng, các nhà toán học thường xem không gian vectơ  $\mathbf{V}$  trên trường  $\mathbf{F}$  tùy ý vừa là cái trừu tượng hóa vừa là cái khái quát hóa của không gian vectơ hai chiều  $\mathbf{R}^2$ , và do đó việc sử dụng các thuật ngữ này sao cho phù hợp việc sử dụng chúng trong toán học là điều quan trọng. Trong khi đó, các nhà giáo dục toán học lại chú trọng xem xét các quá trình nhận thức liên quan. Khái quát hóa thành khái niệm  $\mathbf{R}^n$  từ việc mở rộng  $\mathbf{R}^1$  đến  $\mathbf{R}^2$ , đến  $\mathbf{R}^3$ ,... có thể được mô tả bằng cách áp dụng các quy trình số học thông thường đối với mỗi tọa độ. Trừu tượng hóa thành không gian vectơ  $\mathbf{V}$  trên trường  $\mathbf{F}$  tùy ý là một đối tượng tinh thần (mental) khác hẳn, nó được xác định bởi một hệ tiên đề. Trong khi ở trường hợp thứ nhất, công việc khá đơn giản chỉ gồm một sự mở rộng của các quá trình quen thuộc, thì ở trường hợp sau yêu cầu phải có một sự tổ chức lại khá lớn về mặt tinh thần.

Như vậy, quá trình khái quát hóa mang đặc tính *tiệm tiến* còn quá trình trừu tượng hóa mang đặc tính *nhảy vọt* trong quá trình phát triển nhận thức của người học. Ta sẽ rõ hơn nữa về điều này qua ví dụ sau:

**Ví dụ 2:** Xét khái niệm tích Descartes  $X \times Y$  của hai tập hợp  $X$  và  $Y$ , mỗi phần tử của  $X \times Y$  là một cặp có thứ tự  $(a, b)$  trong đó  $a \in X, b \in Y$ . Từ đây dễ dàng khái quát hóa thành tích Descartes của hữu hạn gồm  $n$  tập hợp  $X_1, X_2, \dots, X_n$ : Mỗi phần tử của  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  là một bộ  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  trong đó  $x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

Khi đó, tập hợp  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  được gọi là tập các chỉ số. Rõ ràng  $I$  có lực lượng hữu hạn. Khi  $I$  có lực lượng vô hạn đếm được, tích Descartes của họ các tập hợp  $\{X_\alpha | \alpha \in I\}$  đánh số bởi  $I$  cũng không khó hình

dung. Mỗi phần tử của tích Descartes  $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$  có dạng

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$  trong đó  $x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots$ . Giả sử  $I$  là một tập hợp vô hạn không đếm được thì việc định nghĩa tích Descartes  $\prod_{i \in I} X_i$  sẽ khó hơn nhiều. Ta

phải sử dụng khái niệm dãy: trước hết nhận xét rằng

mỗi phần tử  $x = (x_1, x_2)$  của tích Descartes  $X_1 \times X_2$  có thể xem là một ánh xạ  $x: \{1, 2\} \rightarrow X_1 \cup X_2$  trong đó  $x(1) = x_1, x(2) = x_2$ . Do đó, ta có thể trừu tượng hóa thành khái niệm tích Descartes  $\prod_{i \in I} X_i$  như là tập hợp các ánh xạ  $x: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$  thỏa mãn điều kiện

$x(i) \in X_i$ . Khái niệm này cũng đúng cho trường hợp  $I$  có hữu hạn hay  $I$  có lực lượng vô hạn đếm được. Chú ý rằng khi  $I$  là một tập hợp vô hạn không đếm được thì cách viết phần tử của tích Descartes  $\prod_{i \in I} X_i$  bởi  $(x_i)_{i \in I}$

là không chính xác vì  $I$  không đánh số được.

Nắm được khái niệm tích Descartes  $\prod_{i \in I} X_i$  với  $I$

là một tập hợp vô hạn không đếm được mới có thể xây dựng được khái niệm không gian vectơ vô hạn chiều.

### 3. Những trở ngại trong quá trình khái quát hóa và trừu tượng hóa

Quá trình định nghĩa một khái niệm Toán học cao cấp phải được nối tiếp bởi một chuỗi các định lý suy luận ra các tính chất của khái niệm đó từ các tiên đề. Xét về mặt nhận thức, đây không chỉ là một quá trình suy diễn mà còn là một quá trình kiến thiết, trong đó người học xây dựng các tính chất của đối tượng trừu tượng, chẳng hạn như các tiên đề xác định không gian vectơ phải đảm bảo các tính chất “thông thường” của phép cộng các vectơ và phép nhân vô hướng được thỏa mãn. Tuy nhiên, để sau này không gặp mâu thuẫn với cơ sở và số chiều của không gian vectơ thì hệ tiên đề phải đảm bảo các vectơ độc lập tuyến tính tối đại của cùng một không gian đều có cùng lực lượng. Do đó, khái niệm không gian vectơ  $\mathbf{V}$  trên trường  $\mathbf{F}$  tùy ý gồm một hệ 8 tiên đề, trong đó 4 tiên đề đầu liên quan đến phép cộng vectơ sao cho  $\mathbf{V}$  cùng với phép cộng ấy trở thành một nhóm giao hoán, 2 tiên đề tiếp theo nêu lên mối liên hệ giữa phép cộng vectơ và phép nhân vô hướng; tiên đề thứ bảy chỉ liên quan trong nội bộ phép nhân vô hướng; tiên đề cuối cùng nói về tính chất unita của  $\mathbf{V}$ . Thực tiễn cho thấy rằng, với hệ tiên đề đó để xây dựng khái niệm không gian vectơ tổng quát vừa đảm bảo tính không mâu thuẫn về mặt logic toán học, vừa đảm bảo không gian vectơ tổng quát có đầy đủ các tính chất quen thuộc của  $\mathbf{R}^2$  và  $\mathbf{R}^3$  mà sinh viên đã biết trong giáo trình hình học phổ thông. Tuy nhiên, đôi khi do yêu cầu sự phạm, số tiên đề có thể được nêu “dôi ra”, chẳng hạn tiên đề giao hoán của phép cộng vectơ có thể được suy ra từ bảy tiên đề còn lại.

Mặt khác, trong quá trình xây dựng các tính chất

của đối tượng toán học trừu tượng này, các trường hợp cụ thể đã biết sẽ đóng vai trò vừa là nhân tố hỗ trợ vừa là nhân tố xung đột tiềm tàng. Chúng hỗ trợ vì chúng gợi ý những tính chất có thể đúng, nhưng mặt khác chúng lại gây ra khó khăn tiềm tàng khi người học cảm thấy phải chứng minh những điều mà dường như hiển nhiên đúng từ các trường hợp cụ thể đó, hoặc tin rằng các tính chất chung cho các trường hợp cụ thể được xét có thể đúng một cách tổng quát cho khái niệm trừu tượng.

Như vậy, trong suốt quá trình xây dựng này, có một sự xung đột giữa các tính chất của các trường hợp cụ thể mà người học biết và các tính chất của khái niệm trừu tượng mới xây dựng cần được suy luận logic từ định nghĩa. Ngoài ra, vì sinh viên đã biết quá nhiều tính chất của khái niệm cũ, nên khi khái quát hóa hay trừu tượng hóa chúng, họ không biết nên giữ lại những tính chất nào đặc trưng nhất. Do đó, khi khái quát hóa hay trừu tượng hóa, bước đầu họ có thể gặp lúng túng và dẫn đến thất bại. Vì vậy, việc phải xây dựng lại khái niệm hay điều chỉnh số tiên đề trong khái niệm ban đầu đã đưa ra là không thể tránh khỏi. Trong nhiều trường hợp, giảng viên phải có những gợi ý cần thiết và đúng lúc. Chẳng hạn, sinh viên đã rất quen thuộc với tính chất giao hoán của vị nhóm cộng  $\mathbf{N}$  hay nhóm cộng các số nguyên  $\mathbf{Z}$ , do đó, khi khái quát hóa và trừu tượng hóa thành các khái niệm vị nhóm hay nhóm tổng quát, sinh viên không thể “bỏ qua” tính chất giao hoán. Vì vậy, giảng viên phải đưa ra những phép toán không giao hoán mà học viên đã biết, chẳng hạn phép nhân các phép thế bậc  $n$  (nên xét trong tập hợp  $S_3$ ) mới hi vọng người học không đưa tính chất giao hoán vào khái niệm mới. Cũng vậy, khi khái quát hóa và trừu tượng hóa vành các số nguyên  $\mathbf{Z}$  thành khái niệm vành tùy ý, họ không thể “bỏ qua” tính chất giao hoán của các vành này, vì các vành họ biết như  $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  hay thậm chí các vành đa thức  $\mathbf{Z}[x], \mathbf{Q}[x], \mathbf{R}[x]$  đều giao hoán. Trong trường hợp này, giảng viên buộc phải gợi ý về phép nhân các ma trận của các ma trận vuông cùng cấp nói chung không có tính chất giao hoán.

Ngay cả khi khái niệm mới đã được thiết lập, do quán tính trong quá trình nhận thức, người học vẫn chưa thể xóa bỏ được những dấu hiệu không bản chất của khái niệm. Giảng viên cần cho học sinh một số lượng phản ví dụ để xóa bỏ chúng.

**Ví dụ 3:** Ở trên, ta đã xét khái niệm vành tổng quát dựa trên sự khái quát hóa và trừu tượng hóa vành các số nguyên  $\mathbf{Z}$ . Nhưng ngay từ nhỏ, sinh viên đã được khắc sâu kết quả: nếu tích của hai số nguyên bằng 0 thì ít nhất một trong hai số đó phải bằng 0. Do đó, họ cho rằng với một vành  $Y$  tùy ý, nếu  $ab = 0$  với  $a \in Y, b \in Y$  sẽ suy ra  $a = 0$  hoặc  $b = 0$ . Giảng viên cần giúp họ chỉ ra rằng trong vành  $\mathbf{Z}_6$  chẳng hạn thì  $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$  nhưng  $\overline{2} \neq \overline{0}, \overline{3} \neq \overline{0}$ . Để cho họ không thấy ví dụ trên đặc biệt, cần xây dựng khái niệm ước của không. Sau đó tìm điều kiện của  $n$  để vành  $\mathbf{Z}_n$  có



ước của không, hoặc chúng tỏ rằng vành  $M_2(\mathbf{R})$  các ma trận vuông cấp hai với phần tử thực có ước của không (chú ý rằng  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ). Nhưng có lẽ

phải đến khi khái quát hóa và trừu tượng hóa  $\mathbf{Z}$  thành khái niệm miền nguyên mới ra mới xóa bỏ được kết luận sai lầm “nếu tích của hai phần tử bằng 0 thì ít nhất một trong hai phần đó phải bằng 0” cho một vành tùy ý.

Mặt khác, nhiều khái niệm mới được hình thành nhờ quá trình khái quát hóa và trừu tượng hóa, nhưng hoặc do các khái niệm này quá trừu tượng, hoặc do các sinh viên không nắm được các khái niệm liên quan nên họ hiểu các khái niệm mới này một cách hình thức. Do đó, họ thường dễ quên và khó vận dụng chúng để giải các bài toán liên quan. Tuy nhiên, nhờ các khái niệm được tiếp thu sau đó, các khái niệm mới này sẽ được làm sáng tỏ.

**Ví dụ 4:** Khái niệm giới hạn của dãy: “Dãy  $\{x_n\}_n$  được gọi là *hội tụ về a* nếu  $\forall \varepsilon > 0$  nhỏ tùy ý tồn tại số nguyên dương  $n_0$  sao cho với mọi số tự nhiên  $n > n_0$  ta có  $|x - a| < \varepsilon$ ”; hoặc khái niệm liên tục: “Hàm số  $f: \mathbf{R} \rightarrow$

$\mathbf{R}$  được gọi là *liên tục tại  $x_0$*  nếu  $\forall \varepsilon > 0$  nhỏ tùy ý tồn tại số thực dương  $\delta$  sao cho với mọi  $x$  mà  $|x - x_0| < \delta$  ta có  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ”. Rõ ràng các khái niệm này rất hình

thức. Để nắm được chúng cần hiểu rằng  $|a - b|$  biểu thị khoảng cách giữa hai điểm trên trục số. Thực tế phải sau khi học khái niệm khoảng cách của “Không gian metric” sinh viên mới nắm vững bản chất của các khái niệm này.

Cũng cần nhấn mạnh rằng “sản phẩm” của khái quát hóa thường là các khái niệm toán học được xây dựng theo *phương pháp kiến thiết*, còn các “sản phẩm” của trừu tượng hóa được xây dựng theo *phương pháp tiên đề*, trong đó Lý thuyết tập hợp đóng vai trò công cụ then chốt trong việc xây dựng khái niệm theo quy trình trừu tượng hóa.

#### 4. Sự phân loại khái quát hóa và trừu tượng hóa trong quá trình nhận thức

Theo các tác giả G. Harel và D. Tall [7], thuật ngữ *khái quát hoá* được sử dụng cả trong và ngoài khuôn khổ toán học với ý nghĩa là quá trình vận dụng một lập luận đã có trong một ngữ cảnh rộng lớn hơn. Tuy nhiên, các quá trình nhận thức được đòi hỏi bởi quá trình khái quát hoá trong toán học lại phụ thuộc vào kiến thức hiện tại của cá nhân. Vì vậy, G. Harel và D. Tall đã đưa ra một sự phân loại *khái quát hoá* dựa vào quá trình xây dựng về mặt tinh thần của cá nhân, gồm *khái quát hoá mở rộng* (expansive generalization), *khái quát hoá tái tạo* (reconstructive generalization) và *khái quát hoá phân biệt* (disjunctive generalization). Thứ nhất là sự *khái quát hoá mở rộng*, đó là sự mở rộng cấu trúc hiện có của sinh

viên mà không đòi hỏi những thay đổi trong tư duy của họ. Thứ hai là *khái quát hóa tái tạo*, nó đòi hỏi phải xây dựng lại các cấu trúc nhận thức hiện có của người học. Chẳng hạn, từ các không gian vectơ  $\mathbf{R}^2$  và  $\mathbf{R}^3$  khái quát hóa thành không gian vectơ  $\mathbf{R}^n$  là khái quát hóa mở rộng, và từ các không gian vectơ  $\mathbf{R}^2$  và  $\mathbf{R}^3$  (kể cả từ không gian vectơ  $\mathbf{R}^n$ ) khái quát hóa thành không gian vectơ  $\mathbf{V}$  trên trường  $\mathbf{F}$  tùy ý là khái quát hóa tái tạo. Rõ ràng ở đây vai trò của lý thuyết tập hợp chiếm một vị trí rất quan trọng. Các phần tử của  $\mathbf{R}^2$  hay  $\mathbf{R}^3$  là một cặp hay bộ ba các số thực; kết quả của khái quát hóa mở rộng là  $\mathbf{R}^n$  mà các phần tử là một bộ số thực có thứ tự, đó là thao tác khái quát hóa quen thuộc. Trong khi đó, mỗi phần tử của không gian vectơ  $\mathbf{V}$  trên trường  $\mathbf{F}$  tùy ý (kết quả của khái quát hóa) rất trừu tượng, có thể là bộ số thực, các vectơ hay các ma trận, hoặc các hàm thực liên tục trên một đoạn, ... Cũng vậy, từ vành số nguyên  $\mathbf{Z}$  khái quát thành vành  $R$  tùy ý là khái quát hóa tái tạo. Các phần tử của  $\mathbf{Z}$  là các số nguyên quen thuộc, còn các phần tử của vành  $R$  có thể là các số, các lớp thặng dư, các đa thức, các ma trận vuông cùng cấp hay các ánh xạ. Vì bản chất các phần tử thay đổi nên phép toán trên chúng cũng thay đổi theo. Chẳng hạn không gian  $C_{[a,b]}$  các hàm

số thực liên tục trên đoạn  $[a, b]$  với phép cộng hàm  $(f, g) \mapsto f + g$ , trong đó  $f + g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  xác định bởi  $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in [a, b]$ , còn phép

nhân vô hướng  $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ , trong đó  $\lambda f: [a, b] \rightarrow$

$\mathbf{R}$  xác định bởi  $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x), \forall x \in [a, b]$ . Ở đây, ta phải chứng minh  $f + g \in C_{[a,b]}, \lambda f \in C_{[a,b]}$  với mọi

$f, g \in C_{[a,b]}$  và  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ . Đây là một sự thay đổi trong cấu trúc nhận thức vốn có của sinh viên, bởi sự “khép kín” của phép cộng và nhân vô hướng trong  $\mathbf{R}^2$  và  $\mathbf{R}^3$  và cả trong  $\mathbf{R}^n$  là hiển nhiên.

D. Tall [8] cho rằng khoảng một phần ba số sinh viên chỉ tiếp nhận các tri thức mới một cách đơn giản bằng cách ghi nhớ các ý tưởng mới như là một bộ sưu tập thông tin bổ sung để học thuộc lòng và bổ sung thêm kiến thức hiện có mà không cần một sự nỗ lực tích hợp nào với ý tưởng cũ. Ông gọi đó là một sự *khái quát hóa phân biệt* và xem đây là một “thảm họa” trong dạy toán cao cấp. Sự mở rộng này chỉ cho phép sinh viên thao tác trên một phạm vi rộng hơn các ví dụ, nhưng ít khả năng có giá trị lâu dài cho sinh viên vì nó đơn giản chỉ cung cấp thêm các thông tin chấp nối mà không giúp sinh viên nâng cao được việc nắm các hàm ý trừu tượng lớn hơn.

Trong quá trình học Toán cao cấp, sinh viên tự mình tiến hành quá trình khái quát hóa mở rộng, nhưng với quá trình khái quát hóa tái tạo, họ thường phải có sự hỗ



trợ của các “lực lượng bên ngoài” (giảng viên hoặc giáo trình). Quá trình khái quát hóa tái tạo rõ ràng đóng một vai trò hết sức quan trọng trong lĩnh hội các kiến thức toán cao cấp, nó là động lực chủ yếu để phát triển năng lực tư duy trừu tượng cho sinh viên. Nhưng quá trình khái quát hóa mở rộng cũng hết sức quan trọng, vì nó vừa sức với đại đa số sinh viên và giúp họ tích lũy thêm tri thức Toán cao cấp cho mình.

Khái quát hóa mở rộng là một kĩ thuật dạy học khá hiệu quả trong trường hợp cần giải quyết một lớp các áp dụng rộng hơn mà không phải trải qua quá nhiều tình huống thay đổi nhận thức căng thẳng. Chẳng hạn, với những sinh viên có thể thực hiện quy trình giải hệ phương trình tuyến tính theo hai biến, họ đều có khả năng khái quát hóa mở rộng cho trường hợp ba, bốn hay nhiều biến mà không gặp khó khăn gì (mặc dù việc tính toán có thể sớm dẫn đến tẻ nhạt, nhàm chán). Thực ra, ta có thể dễ dàng mô tả quá trình tìm tòi nghiệm tường minh của hệ phương trình tuyến tính tổng quát thông qua một hệ cụ thể, chẳng hạn hệ phương trình ba ẩn  $x, y, z$ , bằng cách dùng các thuật ngữ tổng quát (“trừ đi bội thích hợp của phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai và thứ ba để loại bỏ  $x$ , sau đó loại bỏ  $y$  từ các phương trình hệ quả, giải phương trình thu được để tìm  $z$ , quay trở lại tìm  $y$  rồi tìm  $x$ ”). Rõ ràng, người học dễ hình dung quá trình giải tổng quát nhờ tiến trình của lời giải cụ thể hơn là mô tả quá trình đó. Chúng ta sẽ xem loại mở rộng này là sự tiếp cận mang *đặc tính chung của cùng một loại* (generic), nghĩa là nó mô tả *quy trình (tổng quát) điển hình bởi một trường hợp đặc biệt* (chẳng hạn quy trình giải hệ phương trình tổng quát  $n$  ẩn có thể mô tả qua quy trình giải hệ phương trình ba ẩn). Dưới đây là một ví dụ để làm sáng tỏ thêm lý luận nêu trên:

**Ví dụ 5:** Hình thành khái niệm định thức bậc  $n$  có hai phương pháp: dựa vào khái niệm định thức bậc hai mà các sinh viên đã biết trong chương trình toán học phổ thông rồi khái quát hóa thành khái niệm định thức bậc  $n$ ; hoặc dựa vào khai triển định thức bậc  $n$  ( $n \geq 3$ ) theo các định thức bậc nhỏ hơn. Thực tiễn giảng dạy ở một trường đại học đa ngành cho thấy phương pháp thứ nhất chỉ thích hợp cho sinh viên các lớp Sư phạm hoặc Cử nhân Toán học, vì trong quá trình xây dựng đó phải sử dụng công cụ phép thế vốn rất xa lạ với các sinh viên hệ kĩ thuật hay kinh tế tài chính. Vì vậy, đối với các lớp thuộc hệ không chuyên sâu về toán, tốt nhất là dùng phương pháp thứ hai. Tuy nhiên, chỉ cần thông qua một trường hợp đặc biệt là  $n = 3$ , sinh viên có thể nắm được quy trình xây dựng khái niệm định thức bậc  $n$  với  $n = 4, n = 5$  và  $n$  tùy ý lớn hơn 3.

Qua hai ví dụ trên, ta thấy loại quy trình điển hình bởi một trường hợp đặc biệt này thường có hiệu quả đối với đối tượng được xét đến có tính hữu hạn, ở đây là một giá trị  $n$  cụ thể. Đối với các đối tượng được xét có lực lượng vô hạn, cần sử dụng một quy trình cao hơn thiên về trừu tượng hóa.

Một sự tiếp cận tổng quát như vậy vừa tạo ra phương pháp khái quát hoá dễ dàng, bởi vì nó áp dụng các quy trình đã biết trong một bối cảnh rộng hơn, vừa là bước khởi đầu hướng tới *trừu tượng hóa hình thức* (formal abstraction), do nó không liên quan đến một sự tái tạo về mặt nhận thức chủ yếu nào. Thực ra, một khi sinh viên đã suy nghĩ về quá trình khái quát hóa đó và xem nó như một hành động mở rộng tính khả dụng của phương pháp cụ thể một cách có ý thức, thì nó có thể được xem như một hình thức trừu tượng hóa. G. Harel và D. Tall [8] đã dùng thuật ngữ *trừu tượng hóa tổng quát* (generic abstraction) để chỉ hình thức trừu tượng hóa này. Nó trang bị một phương pháp tiếp cận có giá trị đặc biệt đối với các sinh viên quan tâm đến toán học ứng dụng hơn toán học hình thức (thuần túy lí thuyết). Nó cũng có thể cung cấp một pha chuyển tiếp phù hợp giúp cho các sinh viên vượt qua trừu tượng hóa hình thức, tuy nhiên điều này sẽ đòi hỏi sinh viên phải *tổ chức lại mặt nhận thức* mặc dù được chuẩn bị tốt hơn.

Ngày nay, do sự phát triển và tính hữu ích của công nghệ thông tin và truyền thông, giảng viên cần khuyến khích sinh viên viết các chương trình bằng ngôn ngữ máy tính, bởi vì ngôn ngữ này có nhiều cấu trúc tương tự với các cấu trúc của tư duy toán học: tập hợp, dãy, cặp sắp thứ tự, quan hệ, hàm, ... Chẳng hạn, mã máy tính thể hiện quy trình thực hiện một quá trình *hàm*, bắt đầu bằng việc kiểm tra xem đầu vào có thoả mãn các điều kiện xác định hàm đó hay không; do đó, khi được yêu cầu viết mã máy tính, sinh viên buộc phải suy nghĩ về các quy tắc của quá trình *hàm*. Có thể thấy hành động lập trình này là một quá trình tổng quát vì nó tiến hành xây dựng một cấu trúc tổng quát hơn từ các trường hợp riêng để tiến tới một sự trừu tượng hoá tổng quát của khái niệm *hàm*.

## 5. Kết luận

Có thể nói, *khái quát hóa* và *trừu tượng hóa* là hai thao tác quan trọng nhất trong quá trình hình thành các khái niệm Toán cao cấp. Chúng liên quan mật thiết với nhau và bổ sung cho nhau trong quá trình phát sinh và phát triển trí tuệ của người học, đặc biệt đối với các sinh viên ngành Sư phạm Toán học bậc đại học. Có thể xem khái quát hóa là chặng đường mở đầu và trừu tượng hóa là chặng đường kết thúc trong hành trình tới chân lí của một kiến thức Toán cao cấp nói chung hay một khái niệm Toán học cao cấp nói riêng. Trên hành trình nhận thức đó, sinh viên sẽ gặp nhiều trở ngại. Nhưng nếu giảng viên biết phân loại và đề ra những biện pháp thích hợp, họ sẽ vượt qua các trở ngại đó và lĩnh hội được các tri thức Toán cao cấp một cách bản chất, sâu sắc và bền vững.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Bá Kim, (2015), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.



[2]. Hoàng Chúng, (1978), *Phương pháp dạy học toán học*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[3]. N. Hashemi, M. S. Abu, H. Kashefi, K. Rahimi, (2013), Generalization in the Learning of Mathematics, *2<sup>nd</sup> International Seminar on Quality and Affordable Education*.

[4]. M. Mitchelmore, P. White, (2004), *Abstraction in Mathematics and Mathematics Learning, Proceedings of the 28<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, p. 329-336.

[5]. Nguyễn Phú Lộc, (2010), *Dạy học hiệu quả môn Giải tích trong trường phổ thông*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[6]. Phan Trọng Ngọ (chủ biên), Nguyễn Đức Hưởng, (2003), *Các lý thuyết phát triển tâm lý người*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.

[7]. G. Harel, D. Tall, (1991), *The General, the Abstract and the Generic in Advanced Mathematical Thinking, For the Learning of Mathematics*, Vol. 11 Num. 1, p.38-42.

[8]. D. Tall, (2002), *Advanced mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers.

[9]. Nguyễn Hữu Việt Hưng, (2001), *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[10]. Hoàng Xuân Sính, (2003), *Đại số đại cương*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

## GENERALIZATION AND ABSTRACTION IN ADVANCED MATHEMATICS

Nguyen Chien Thang - Vinh University

Email: [ncthang2009@gmail.com](mailto:ncthang2009@gmail.com)

Le Thi Ngoc Thuy - Nghe An College of Education

Email: [thuy76sp@gmail.com](mailto:thuy76sp@gmail.com)

**Abstract:** The article addresses the generalization and abstraction in advanced Maths. The author analyses: 1/ Processes of generalization and abstraction when forming knowledge and concepts in advanced Maths; 2/ Analysis of difficulties and how to overcome the difficulties when implementing the above mentioned processes; 3/ Approaches in classifying generalization and abstraction in terms of perception, and orientations for developing each types of generalization in teaching advanced Maths at universities. In author's opinions, generalization and abstraction are the two most important actions in the process of forming advanced Maths concepts. They are closely connected and supplemented to each other in the process of intellectual development by learners, particularly by Maths pedagogical students at universities. It can be seen that generalization is the first stage and abstraction as the final stage in the way to the truth of an advanced Maths knowledge in general or an advanced Maths concept in particular.

**Keywords:** Generalization; abstraction; advanced mathematics; student; university.