MỘT SỐ BIỆN PHÁP SƯ PHẠM RÈN LUYỆN KĨ NĂNG SIÊU NHẬN THỨC NHẰM BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC PHÁT HIỆN VÀ GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC KHÔNG GIAN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

HOÀNG XUÂN BÍNH
Trường Đại học Nội vụ Hà Nội
Email: hoangbinhncs@gmail.com

Tóm tắt: *Việc rèn luyện cho học sinh một số kĩ năng siêu nhận thức thực sự là cần thiết đối với họ. Các kĩ năng này sẽ bồi dưỡng năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề cho học sinh. Trong bài viết này, tác giả tập trung nghiên cứu để đưa ra và làm rõ các biện pháp sư phạm rèn luyện kĩ năng siêu nhận thức nhằm bồi dưỡng năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề cũng như làm rõ những ưu điểm của việc rèn luyện các kĩ năng siêu nhận thức nhằm bồi dưỡng năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề cho học sinh trong dạy học Hình học không gian ở trường trung học phổ thông. Từ đó, tác giả đưa ra các đề xuất cho việc áp dụng những biện pháp rèn luyện kĩ năng siêu nhận thức vào trong giảng dạy toán ở trường trung học phổ thông trong thời gian tới.*

Từ khóa: *Kĩ năng siêu nhận thức; năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề; Hình học không gian; trung học phổ thông.*

(Nhận bài ngày 29/8/2017; Nhận kết quả phản biện và chỉnh sửa ngày 15/9/2017; Duyệt đăng ngày 25/12/2017).

1. Đặt vấn đề

Trong những năm gần đây, việc đổi mới phương pháp dạy học (PPDH) ở nước ta đã có chuyển biến tích cực. Các PPDH hiện đại như dạy học (DH) phát hiện và giải quyết vấn đề (GQVĐ), DH kiến tạo, DH khám phá,... đã và đang được các nhà sư phạm, các thầy cô giáo quan tâm nghiên cứu và áp dụng qua từng tiết dạy, từng bài tập. Tuy nhiên, PPDH ở trường phổ thông hiện nay vẫn chưa chú tâm nhiều đến rèn luyện những kĩ năng (KN) cần thiết theo hướng phát triển năng lực (NL) nhận thức của người học.

Khái niệm đầu tiên của siêu nhận thức (SNT) được đưa ra vào năm 1976 bởi nhà Tâm lí học người Mĩ J.H.Flavell. Theo ông, SNT là: "*Sự hiểu biết của cá nhân liên quan đến quá trình nhận thức của bản thân, các sản phẩm và những yếu tố khác có liên quan, trong đó còn đề cập đến việc theo dõi tích cực, điều chỉnh kết quả và sắp xếp các quá trình này để luôn hướng tới mục tiêu đặt ra*" [1].

"SNT" (metacognition) hoặc "tư duy về tư duy" (thinking about thinking) được giải thích là NL kiểm soát quá trình suy nghĩ của cá nhân, đặc biệt là nhận thức về việc lựa chọn và sử dụng các chiến lược giải toán. SNT là tự phân tích quá trình suy nghĩ của một người nào đó trong khi GQVĐ.

KN SNT là khả năng để theo dõi và chỉ đạo hoạt động KN nhận thức để có được những thành công lớn nhất có thể [2]. Như vậy, KN SNT là KN giám sát và điều chỉnh suy nghĩ.

Trong *Đào tạo KN SNT để GQVĐ*, đã tập trung vào bốn KN SNT có giá trị trong các nhiệm vụ GQVĐ. Đó là: (1) Xác định và xác định vấn đề, đó là, làm thế nào để nhận ra rằng có vấn đề cần giải quyết; (2) Đại diện cho vấn đề là việc làm thế nào để tìm ra những điều chính xác là vấn đề; (3) Lập kế hoạch làm thế nào để tiến hành GQVĐ; (4) Đánh giá hiệu suất của bạn, giúp bạn hiểu làm thế nào để đạt được một giải pháp.

Việc rèn luyện KN SNT (metacognitive skills) cho học sinh (HS) trong quá trình DH toán phổ thông là một xu hướng DH mới đang được chú trọng trên thế giới hiện nay. Nó giúp HS hiểu được quá trình suy nghĩ của bản thân trong quá trình giải bài toán và ý nghĩa của bài toán mang lại. Từ đó, HS có niềm say mê hứng thú học tập. Vì vậy, trong bài viết này, tác giả mong muốn tập trung nghiên cứu để đưa ra một số biện pháp sư phạm rèn luyện KN SNT nhằm bồi dưỡng NL phát hiện và GQVĐ cho HS trong DH Hình học không gian ở trường trung học phổ thông (THPT) để có những áp dụng vào quá trình DH toán ở nước ta trong thời gian tới.

2. Nội dung nghiên cứu

Theo Sigmund Tobias - Giáo sư tâm lí tại Institute for Urban and Minority Education, Columbia University và Howard.T.Everson - Giáo sư tâm lí tại Fordham University and American Institutes for Reseach, SNT có các thành phần chính sau: Lập kế hoạch cho mục tiêu; Giám sát, điều chỉnh trong quá trình GQVĐ; Tự đánh giá quá trình GQVĐ đó. Mỗi thành tố nói trên chính là một KN SNT nhằm bồi dưỡng NL phát hiện và GQVĐ. Điều này phù hợp với các KN SNT nói trên vì để lập được kế hoạch thì phải xác định được vấn đề và để đánh giá được hiệu xuất của bạn thì phải giám sát, điều chỉnh (nếu cần). Do đó, việc rèn luyện cho HS biết lập kế hoạch cho mục tiêu; giám sát, điều chỉnh trong quá trình GQVĐ và tự đánh giá quá trình GQVĐ chính là rèn luyện KN SNT nhằm bồi dưỡng NL GQVĐ.

2.1. Thông qua hoạt động liên lưởng và huy động kiến thức trong giải toán góp phần rèn luyện cho học sinh kĩ năng lập kế hoạch

Liên tưởng có nghĩa là: "Nhân sự vật, hiện tượng nào đó mà nghĩ đến sự vật, hiện tượng khác có liên quan".

Theo tác giả Bùi Văn Huệ, liên tưởng có vai trò rất quan trọng khi ghi nhớ và nhớ lại. Nhà Tâm lí học P.A.Sêvarev đã nghiên cứu tỉ mỉ những mối liên tưởng khái quát độc đáo và vai trò của chúng trong DH. Ông chỉ ra rằng: Những mối liên tưởng khái quát bao gồm 3 kiểu cơ bản, những liên tưởng được biến đổi một nửa, những liên tưởng trừu tượng - biến thiên, những liên tưởng cụ thể - biến thiên.

L.B.Itenxơn cho rằng: "Tư duy tốt tức là tư duy đúng đắn và có hiệu quả, biết thực hiện được những liên tưởng khái quát, những liên tưởng phù hợp với bài toán cần giải. Vì vậy, để việc dạy tư duy có hiệu quả, không chỉ đòi hỏi phải tìm hiểu những thuộc tính hay những quan hệ chung xác định của các đối tượng mà còn phải biết thuộc tính này là bản chất đối với những bài toán nào".

K.K.Plantônôv xem tư duy như là một quá trình gồm nhiều giai đoạn kế tiếp nhau, mà hai trong số các giai đoạn ấy là: Xuất hiện liên tưởng, sàng lọc liên tưởng và hình thành giả thuyết để làm được điều này cần phải có khả năng SNT.

Theo tác giả Vũ Dương Thụy: "Trong DH, cần chú ý rèn cho HS KN biến đổi xuôi chiều và ngược chiều một cách song song với nhau nhằm giúp cho việc hình thành các liên tưởng ngược diễn ra đồng thời với việc hình thành các liên tưởng thuận".

Như vậy, vai trò của liên tưởng trong quá trình lập kế hoạch là rất quan trọng, liên tưởng cũng đóng vai trò quan trọng trong hoạt động tư duy giải toán.

Trong quá trình giải một bài toán cụ thể, lẽ đương nhiên không cần *huy động* đến mọi kiến thức mà người giải đã thu thập, tích luỹ được từ trước. Việc cần huy động đến những kiến thức nào, cần xem xét đến những mối liên hệ nào phụ thuộc vào *khả năng chọn lọc* của người giải toán. G.Pôlya gọi việc nhớ lại có chọn lọc các tri thức là sự *huy động*. Các thành tố của KN này chủ yếu là: KN lựa chọn các công cụ thích hợp để GQVĐ; KN chuyển đổi ngôn ngữ; KN quy lạ về quen nhờ biến đổi các vấn đề, biến đổi các bài toán về dạng tương tự.

Trước khi giải một bài toán, thường là chưa khẳng định được chắc chắn sẽ dùng những kiến thức nào trừ khi đó là bài toán đã có thuật giải hoặc là bài toán khá dễ. Trước khi bắt tay vào giải một bài toán cụ thể, người giải đã tích luỹ được rất nhiều kiến thức nhưng lúc này dùng kiến thức nào thì thường bài toán không nói rõ. Tuy nhiên, G.Polya cũng khẳng định "dù cho bài toán của chúng ta như thế nào cũng mặc lòng, ta có thể tin tưởng từ trước rằng muốn giải được bài toán đó thì phải vận dụng những kiến thức đã học" [3].

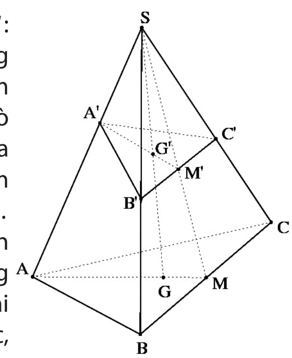
Để tăng cường khả năng huy động kiến thức để lập kế hoạch khi giải toán đòi hỏi người thầy trong quá trình giảng dạy phải đặc biệt chú trọng tri thức phương pháp, chẳng hạn logic suy nghĩ nên bắt đầu từ đâu và thường bao gồm những bước nào, cách suy nghĩ để phát hiện ra định lí, mệnh đề, bài toán phụ có liên quan,... Muốn làm được điều đó thông thường người thầy phải đặt ra những câu hỏi mang tính định hướng qua các bước nhất định và với một hệ thống bài tập nhất định. Dần dần HS có thói quen tự đặt câu hỏi trước khi GQVĐ, tìm ra mấu chốt bài toán. Chúng ta nên tham khảo *Bản gợi ý phương pháp chung giải toán* của G. Polya để giúp HS tự định hướng suy nghĩ tìm ra lời giải, vận dụng thích hợp ở từng tình huống cụ thể. Chẳng hạn:

Ví dụ: *Cho hình chóp SABC. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, một mặt phẳng (a) cắt các cạnh SA, SB, SC, SG lần lượt tại A', B', C', G'. Chứng minh rằng:*

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'} \quad (1)$$

Định hướng đi tới lời giải 1:

Nhờ di chuyển liên tưởng trọng tâm của hệ ba điểm trong không gian đóng vai trò tương tự như trọng tâm của hệ hai điểm (tức là trung điểm của đoạn thẳng) trong phẳng.



Hình 1

Nhờ liên tưởng hình chóp tam giác, mặt phẳng trong không gian đóng vai trò tương tự như tam giác, đường thẳng trong phẳng.Ta đi đến bài toán đóng vai trò tương tự như bài toán trên trong phẳng là: *Cho tam giác SAB. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, một đường thẳng d bất kì cắt các cạnh SA, SM, SB lần lượt tại A', M', B'. CMR:*

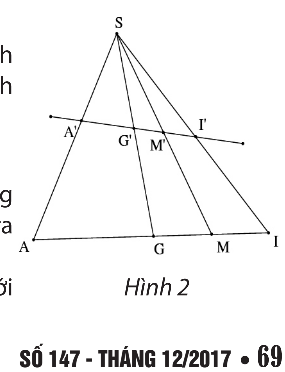
$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}=2\frac{SM}{SM'}$$

Việc liên tưởng đến bài toán tương tự và giải bài toán này có tác dụng như thế nào đối với việc giải bài toán trên?

Gọi M là trung điểm của BC, M' là giao điểm của SM với B'C'. Xét bộ phận phẳng (SBC), áp dụng kết quả trên ta có: $\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=2\frac{SM}{SM'}$.

Như vậy, để chứng minh (1), ta quy về chứng minh $\frac{SA}{SA'}+2\frac{SM}{SM'}=3\frac{SG}{SG'}$. (2)

Ta chứng minh (2) bằng cách tách bộ phận phẳng ra khỏi hình chóp.



Hình 2

Gọi I là điểm đối xứng với

G qua M, I′ là giao điểm của SI với A′M′ và sử dụng kết quả nêu trên ta được điều phải chứng minh.

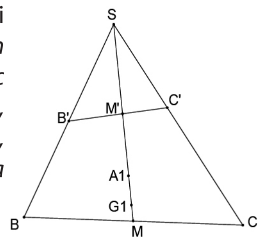
Định hướng đi tới lời giải 2:

Giả thiết và kết luận của bài toán chứa đựng các bất biến của phép chiếu song song: Trọng tâm của tam giác, trung điểm của đoạn thẳng, tỉ số của hai đoạn thẳng cùng phương, thẳng hàng. Điều này giúp ta liên tưởng đến việc sử dụng phép chiếu song song để chứng minh.

Xét phép chiếu song song theo phương A′M′ lên mặt phẳng (SBC), ảnh của S, B, C, M, B′, C′, M′ là chính nó, ảnh của A′, G′ là M′, ảnh của A, G là A_1, G_1.

Theo tính chất của phép chiếu song song ta có: A_1, G_1 thuộc SM, G_1 thuộc A_1M và $\frac{SA}{SA'}=\frac{SA_1}{SM'},\frac{SG}{SG'}=\frac{SG_1}{SM'},\frac{A_1G_1}{G_1M}=\frac{AG}{GM}=2.$

Bài toán đã cho quy về bài toán trong phẳng sau: *Cho tam giác SBC. B′, C′ là hai điểm thuộc SB, SC; M là trung điểm của BC, M′ là giao điểm của SM và B′C′. A_1, B_1 thuộc SM sao cho G_1 nằm giữa A_1M và* $A_1G\ =2G_1M$.



Hình 3

Chứng minh rằng:

$$\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}+\frac{SA_1}{SM'}=3\frac{SG_1}{SM'}$$

Theo kết quả đã biết: $\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=2\frac{SM}{SM'}$

Bài toán quy về chứng minh: $2\frac{SM}{SM'}+\frac{SA_1}{SM'}=3\frac{SG_1}{SM'}$

Ta có: $2\frac{SM}{SM'}+\frac{SA_1}{SM'}=\frac{2SG_1+2G_1M+SG_1-A_1G}{SM'}$

$=3.\frac{SG_1}{SM'}$ (do $A_1M\ =\ 2G_1M$).

Định hướng đi tới lời giải 3:

Đẳng thức cần chứng minh liên quan đến tỉ số các độ dài. Điều này giúp ta liên tưởng đến phương pháp sử dụng thể tích để chứng minh.

Ta nhớ lại kết quả sau: *Cho khối chóp S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SB lần lượt lấy ba điểm A′, B′, C′ khác S. Gọi V và V′ lần lượt là thể tích các khối chóp S.ABC và S.A′B′C′. Ta có:* $\frac{V}{V'}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$.

Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của các khối chóp S.A′B′G′, S.B′C′G′, S.C′A′G′. Lại có G là trọng tâm tam giác ABC nên $V_{S.ABG}=\ V_{S.BCG}=\ V_{S.CAG}=\frac{1}{3}V$, trong đó V là thể tích khối chóp S.ABC.

Áp dụng kết quả trên ta có:

$\frac{V_1}{V_{SABG}}+\frac{V_2}{V_{SBCG}}+\frac{V_3}{V_{SCAG}}=3\frac{V'}{V}$ (trong đó V′ là thể tích khối chóp S.A′B′C′)

Từ đẳng thức này vận dụng kết quả đã biết trên ta được điều phải chứng minh.

Định hướng đi đến lời giải 4:

Đẳng thức cần chứng minh liên quan đến tỉ số độ dài. Điều này giúp ta liên tưởng đến sử dụng phương pháp vectơ để chứng minh.

Bằng cách đặt $\overrightarrow{SA}=m\overrightarrow{SA'},\overrightarrow{SB}=n\overrightarrow{SB'},\overrightarrow{SC}=p\overrightarrow{SC'},\overrightarrow{SG}=q\overrightarrow{SG'}.$

Bài toán quy về chứng minh $m\ +\ n\ +\ p\ =\ 3q$. Do G là trọng tâm của tam giác nên

$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SG}\Leftrightarrow m\overrightarrow{SA'}+n\overrightarrow{SB'}+p\overrightarrow{SC'}=3q\overrightarrow{SG'}$ (3)

Do G′ thuộc mặt phẳng (A′B′C′) nên tồn tại các số $x,\ y,\ z$ sao cho $x+y+z=1$ và $\overrightarrow{SG'}=x\overrightarrow{SA'}+y\overrightarrow{SB'}+z\overrightarrow{SC'}.$

Thay vào (3) ta được :

$m\overrightarrow{SA'}+n\overrightarrow{SB'}+p\overrightarrow{SC'}=3q(x\overrightarrow{SA'}+y\overrightarrow{SB'}+z\overrightarrow{SC'})$ hay

$(m-2qx)\overrightarrow{SA'}+(n-3qy)\overrightarrow{SB'}+(p-3qz)\overrightarrow{SC'}=\vec{0}$

Do $\{\overrightarrow{SA'},\overrightarrow{SB'},\overrightarrow{SC'}\}$ độc lập tuyến tính nên:

$$\begin{cases}m-3qx=0\\n-3qy=0\\p-3qz=0\end{cases}\Rightarrow m+n+p=3q\left(x+y+z\right)=3q.$$

Như vậy, nhờ vào liên tưởng và huy động kiến thức, HS đã đưa ra được nhiều hướng giải giải khác nhau từ đó học sinh lựa chọ một phương pháp giải phù hợp nhất.

HS liên tưởng và huy động kiến thức để lập kế hoạch giải quyết tốt các bài toán còn tùy thuộc vào khả năng phân tích, phán đoán và quy lạ về quen trong nội tại một nội dung toán học và chuyển đổi từ ngôn ngữ này sang ngôn ngữ khác để diễn đạt cùng một nội dung. Khi xác định KN này, chúng tôi cho rằng khả năng liên tưởng và huy động kiến thức đã biết đóng vai trò rất quan trọng việc lập kế hoạch giải toán hay định hướng giải.

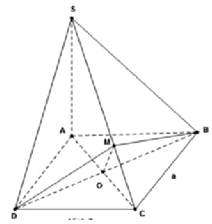
2.2. Tăng cường các ví dụ nhằm tạo điều kiện cho học sinh tập luyện phát hiện và sửa chữa sai lầm trong lời giải góp phần rèn luyện kĩ năng giám sát, đánh giá và điều chỉnh trong quá trình giải toán

Thực tế, nhiều HS giải sai bài toán nhưng không biết mình giải sai vì các em rất yếu trong việc phát hiện và sửa chữa sai lầm trong quá trình giải một bài toán. Do đó, việc rèn luyện cho KN giám sát, tự phát hiện và sửa chữa sai lầm là hết sức cần thiết. Để phát hiện được sai lầm, HS phải kiểm tra lại từng bước giải "*Hãy củng cố những thành công bước đầu của anh. Thực hiện một cách chi tiết những phép tính đại số hay hình học mà anh đã sơ bộ làm trước đây. Kiểm tra lại mỗi bước giải những suy nghĩ logic hay bằng trực giác, hay nếu có thể được bằng cả hai cách*" [3; tr.52]. Chẳng hạn, ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 1: *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC)và (SDC) bằng 60⁰. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD.*

Gọi M là hình chiếu vuông góc của B lên cạnh SC

HS dễ dàng chứng minh được DM cũng vuông góc với cạnh SC. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) *và (SDC) là* $\widehat{BMD}$. Theo bài ra $\widehat{BMD} = 60^0$.



Hình 4

Vì $\Delta\widehat{MBD}$ là tam giác cân tại M nên $MO \perp BD$ và $\widehat{OMD} = \dfrac{1}{2}\widehat{BMD} = 30^0$.

Xét ΔMOD vuông tại O ta có

$$MD = \frac{OD}{\sin\widehat{OMD}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin 30^0} = a\sqrt{2}$$

Ta có $CD \perp SA$ và $CD \perp AD$ nên $CD \perp (SAD)$ $\Rightarrow CD \perp SD$

Xét ΔSCD vuông tại D, ta có:

$$\frac{1}{DM^2} = \frac{1}{DS^2} + \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{DM^2} - \frac{1}{DC^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} - \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{2a^2} \text{ (vô lí)}$$

Đến đây, HS sẽ nghĩ ngay đến việc tính toán sai ở bước nào đó hoặc giải sai hoặc để bài sai thậm chí là bế tắc trong quá trình giải tiếp. Sau khi HS kiểm tra lại tất cả các bước biến đổi tính toán thì cũng không phát hiện ra chỗ sai. Vậy tại sao lại có sự vô lí này?

Vấn đề ở đây là HS phải tìm ra nguyên nhân dẫn đến điều vô lí trên, mà khả năng giám sát và điều chỉnh không phải HS nào cũng có vì HS không biết bắt đầu kiểm tra xem sai từ đâu, sai từ phương pháp giải hay sai từ cách tính toán biến đổi hay sai từ kiến thức cơ bản...

Trong bài này, HS phải tự phát hiện ra góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SDC) phải bằng 120^0 và khi đó HS sẽ làm được.

Vì ΔMBD là tam giác cân tại M nên $MO \perp BD$ và $\widehat{OMD} = \dfrac{1}{2}\widehat{BMD} = 60^0$

Xét ΔMOD vuông tại O ta có

$$MD = \frac{OD}{\sin\widehat{OMD}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin 60^0} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Ta có $CD \perp SA$ và $CD \perp AD$ nên $CD \perp (SAD)$ $\Rightarrow CD \perp SD$

Xét ΔSCD vuông tại D, ta có:

$$\frac{1}{DM^2} = \frac{1}{DS^2} + \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{DM^2} - \frac{1}{DC^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} - \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow DS = a\sqrt{2}$$

Xét ΔSAD vuông tại A, ta có:

$$SA = \sqrt{DS^2 - AD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - a^2} = a$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.AB.AD = \dfrac{1}{3}a^3$ (đvdt).

Tóm lại, HS có nỗ lực tư duy như vậy không những vấn đề được giải quyết một cách hiệu quả mà nó còn góp phần rút ra kinh nghiệm lập kế hoạch cho việc GQVĐ lần sau được sát với thực tế và khả thi hơn. Do đó, việc bồi dưỡng KN SNT là cần thiết để giúp HS phát triển khả năng phát hiện và sửa chữa sai lầm, giám sát, điều chỉnh trong quá trình GQVĐ toán học của họ.

2.3. Tổ chức cho học sinh nhìn bài toán ở nhiều góc độ khác nhau và mở rộng bài toán góp phần rèn luyện kĩ năng tự đánh giá quá trình giải quyết vấn đề

HS quan sát và đánh giá hiệu suất của họ một cách chính xác có thể phản ứng một cách thích hợp hoặc thay đổi chiến lược nghiên cứu của họ để đạt được các mục tiêu. Vì vậy, đó là mong muốn thu hút HS vào các hoạt động này sẽ giúp họ tự đánh giá và giải thích một cách rõ ràng những điều biết và không biết.

Chức năng đánh giá SNT đề cập đến sự phê phán về điểm mạnh và điểm yếu trong quá trình tư duy của một người ở những tình huống cụ thể. Trong đó, mỗi người có thể đưa ra nhận xét của mình về hiệu quả tư duy và việc lựa chọn các chiến lược. Qua các tiêu chí đánh giá, người học nhìn lại quá trình GQVĐ cũng như quá trình học tập của mình và biết được mức độ hoàn thành đã đạt yêu cầu chưa. Để rèn luyện cho HS có được khả năng tự đánh giá quá trình giải một bài toán, giáo viên phải tập luyện cho HS biết xem xét bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau và phải biết mở rộng bài toán có thể là bài toán tương tự hoặc ứng dụng bài toán vào trong thực tế cuộc sống.

Nhìn bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau và mở rộng bài toán có vai trò quan trọng trong việc rèn luyện KN tự đánh giá vì qua đó người học chủ động xem xét lại quá trình, kết quả học tập của mình để tự điều chỉnh cách học, xác định động cơ học tập và lập kế hoạch để tự nâng cao kết quả học tập. Chẳng hạn:

Ví dụ 2: Xét bài toán: *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh là a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' ?*

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta có thể xem xét trên những góc độ, khía cạnh phù hợp với sơ đồ tri thức đã có, hoặc từ tri thức, kinh nghiệm đó đề xuất những vấn đề tương đương với những vấn đề đã được giải quyết nhằm phát triển tri thức một cách sâu rộng hơn có cách nhìn vấn đề một cách toàn diện hơn.

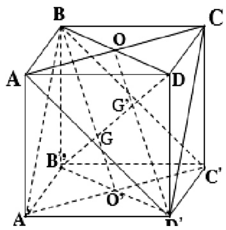
Góc độ 1: *Xét khoảng cách giữa hai đường thẳng* *chéo nhau a và b là khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song tương ứng chứa hai đường thẳng đó.*

Kí hiệu khoảng cách là d.

- Từ gợi ý trên, HS sẽ phải tìm hai mặt phẳng song chứa hai đường thẳng chéo nhau. HS phát hiện được $CD'//AB; BC'//AD'$ nên $(ACD')//(BA'C')$

Ta có: $CD' \subset (ACD')$ và $CD'//(BA'C') \supset BC'$

$\Rightarrow d\left(BC', CD'\right) = d((ACD'), (BA'C'))$



Hình 5

- Để tính khoảng cách, giáo viên gợi ý cho HS có thể huy động kiến thức dựa trên việc nhận xét về BO và D'O.

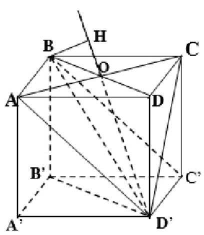
(Câu trả lời mong đợi: Chúng đều là các đường trung tuyến của hai tam giác ACD', BA'C').

Bằng thao tác tư duy, HS hoàn toàn chứng minh được $B'D \perp \left(BA'C'\right)$ tại G; $B'D \perp \left(D'AC\right)$ tại G'; $GG' = \frac{1}{3}B'D$,

mà $B'D = a\sqrt{3} \Rightarrow d\left(BC', CD'\right) = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$

Khi đã giải quyết xong một vấn đề chúng ta không nên bằng lòng ở đó mà cần cố gắng khai thác sâu thêm trong nội tại của nó để hình thành tri thức mới, chẳng hạn có thể đề xuất bài toán sau:

Bài toán 1: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' cạnh a. CMR đường chéo B'D lần lượt đi qua trọng tâm G, G'của tam giác ACD',BA'C.''



Hình 6

Góc độ 2: *Xét khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách giữa đường thẳng* $a//\left(P\right) \supset b$

Với hướng suy nghĩ này chúng ta sẽ phải chọn một mặt phẳng chứa một đường thẳng và song song với đường thẳng còn lại: $BC'/\left(ACD'\right) \supset CD'$

nên $d\left(BC',\ CD'\right) = d\left(BC',\ \left(ACD'\right)\right)$

- Xác định khoảng cách d. Trong (BDD'B') kẻ $BH \perp D'O \in \left(ACD'\right)$ nên $BH = d\left(BC', \left(ACD'\right)\right)$. Để ý BH là đường cao DD'BO mà $S_{DBOD'} = \frac{1}{2}S_{DBD'D}$

Từ đó suy ra: $BH = \frac{1}{3}\mathrm{a}\sqrt{3}.$

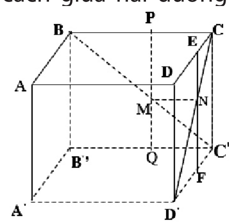
Vậy $d\left(BC', CD'\right) = BH = \frac{1}{3}\mathrm{a}\sqrt{3}.$

Theo G.Polya, khi nghiên cứu bài toán, ta phải biết gạt bỏ cái gì không phải là bản chất và chỉ giữ lại cái gì thuộc về bản chất nên từ bài toán trên ta có thể phát biểu lại dưới một dạng khác:

Bài toán 2: Cho lăng trụ ABC.A'B'C', có cạnh $AB = AC = a$, gọi O là trung điểm của BD . Từ B kẻ đường thẳng cắt C'O tại H. Chứng minh H thuộc đường tròn tâm B.

Bài toán 3: Cho hai hình vuông ABA'B' và CDA'B' cạnh a, trên đường thẳng Dx không vuông góc với mặt phẳng (CDA'B') lấy một điểm H. Hãy xác định vị trí của H để khoảng cách BH là nhỏ nhất.

Cách giải của hai bài toán vừa đề xuất chính là cách giải của bài toán về tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.



Hình 7

Góc độ 3*: Xem khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là đường vuông góc chung của chúng*

Từ nhận xét đó, ta hình thành sơ đồ kiến thức cần huy động như sau:

- Giả sử MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.Ta cần tìm vị trí của M trên BC' và N trên CD':

Đặt: $C'M = x; NC = y$ với $x, y \in [0;\ a].$

+) Tìm x, y. Khi này ta phải liên tưởng đến hệ thức Talet trong mặt phẳng.

Từ M kẻ $PQ//CC'$, từ N kẻ $EF//CC'$.

Ta có: $\frac{CN}{CD'} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow CE = \frac{y}{\sqrt{2}} = C'F = NF$

$\Rightarrow DE = NF = FD' = a - \frac{y}{\sqrt{2}}.$

Tương tự: $C'Q = MQ = CP = \frac{x}{\sqrt{2}},$

$B'Q = BP = MP = a - \frac{y}{\sqrt{2}}.$

Tính MN.

Việc làm này được thực hiện thông qua xét hai cặp tam giác vuông MNC, MND' và MNC', MNB tương ứng theo hai đường thẳng chéo nhau BC', CD'. Áp dụng định lí Pitago cho các tam giác vuông ta được:

DMND' vuông tại N:

$$MN^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + a^2 - (a\sqrt{2} - y)^2 \quad (1)$$

ΔDMNC vuông tại N nên:

$$MN^2 = \left(a - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - y^2 \quad (2)$$

Kết hợp (1), (2) ta được phương trình:

$2y + x = \sqrt{2}a\left(*\right)$

Tương tự đối với cặp tam giác vuông MNC', MNB ta có phương trình: $2x + y = \sqrt{2}a\left(**\right)$

Từ (*) và (**) ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} 2y+x=a\sqrt{2} \\ 2x+y=a\sqrt{2} \end{cases}$. Giải hệ này tìm được $x=y=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Vậy M∈BC′ và cách điểm C′ một khoảng là $MC'=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$, và $N\in CD'$ cách C một khoảng là $CN=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Khi đó thay x, y vào một trong các biểu thức biểu thị của MN ta được:

$$MN^2=(a-\frac{x}{\sqrt{2}})^2+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2-y^2=\frac{a^2}{3}.$$

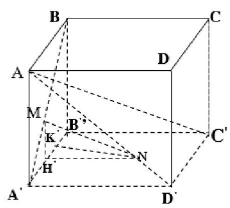
Hay $MN=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. $MN=\dfrac{1}{3}a\sqrt{3}$.

Cách giải trên cho thấy độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau không phụ thuộc vào vị trí của M, N. Như vậy, ta có thể đề xuất bài toán sau:

Bài toán 4: Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh a. Lấy điểm $M\in A'B, N\in AD'$ sao cho $A'M=D'N=x(x\in(0,a\sqrt{2}))$

a) Tìm x để đoạn thẳng MN có độ dài ngắn nhất, tính MN.

b) Khi MN ngắn nhất, hãy chứng tỏ MN là đường vuông góc chung của A′B và AD′, đồng thời $MN//AC'$.



Hình 8

Ta có thể giải quyết bài toán này dựa trên việc huy đông kiến thức về hệ thức Talet.

-Kẻ $MH\perp A'B'$ thì $MH//BB'$ và $MH=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}=AH$

- Kẻ $NK\perp AD$ thì $NK=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}=DK$

$\Rightarrow KH=a-x\sqrt{2}.$

Ta có

$$MN^2=MH^2+HK^2+KN^2=3x^2-2a\sqrt{2}x+a^2.$$

Vậy MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $x=a\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Thay $x=a\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ vào MN ta được: $MN=a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Để chứng tỏ MN là đường vuông góc chung thì $MN\perp A'B$ và $MN\perp AD'$.

Xét tam giác AMN có $MN^2=\dfrac{a^2}{3}$; $AM^2=\dfrac{2a^2}{9}$, tính AN theo hàm số cos trong tam giác ADN.

Góc độ 4: *Dùng ngôn ngữ véc tơ*

HS phát biểu lại bài toán bằng cách khác cho phù hợp với tình huống sư phạm hoặc là việc biến đổi đối tượng để hình thành sơ đồ nhận thức mới.

Bài toán 5: Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc BC′ và CD′ sao cho $MA=k\,MD, ND=k\,NB\ (k\neq 0;1)$.

a) Chứng minh rằng $MN//(A'BC)$.

b) Khi $MN//A'C$, chứng tỏ MN là đường vuông góc chung của BC′và CD′

Giáo viên gợi ý cho HS huy động kiến thức về véc tơ và các điều kiện đồng phẳng của ba véc tơ trong không gian để chứng minh cho $MN//(A'BC)\Leftrightarrow$ chứng tỏ $\overrightarrow{MN};\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA'}$ đồng phẳng, đồng thời MN không thuộc mp (A′BC).

$\overrightarrow{MN};\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA'}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\dfrac{k}{1-k}\vec{a}-\dfrac{k}{1-k}\vec{b}+\dfrac{1+k}{1-k}\vec{c}$ (*)

với $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{b};\overrightarrow{AD}=\vec{c}$

Theo quy tắc hình hộp,

$A'C=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c};\ MN//A'C\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{A'C},$

$$\Leftrightarrow\frac{k}{1-k}\vec{a}-\frac{k}{1-k}\vec{b}+\frac{1+k}{1-k}\vec{c}=m(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

Do $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ là ba véc tơ không đồng phẳng từ đó tìm được k. Thay k vào hệ thức (*) và tính độ dài của $\overrightarrow{MN}$ ta được khoảng cách MN cần tìm.

SNT (tư duy về tư duy) được coi là chiến lược học tập bậc cao lựa chọn và theo dõi các thao tác tâm lí, tạo điều kiện cho tư duy phê phán và sáng tạo. Người học tập thành công có thể đánh giá về tư duy và học tập của chính họ, xác định mục tiêu học tập và thực hiện việc học có kết quả đến mức nào, lựa chọn chiến lược và phương pháp phù hợp cũng như theo dõi tiến độ tiến tới mục tiêu. Người học thành công phải biết phát hiện vấn đề và làm gì nếu có vấn đề xuất hiện, họ biết điều gì sẽ xảy ra nếu họ không dành đủ thời gian và thực hiện đúng tiến độ để đạt mục tiêu. Việc DH tập trung vào giúp người học phát triển KN tự đánh giá sẽ góp phần nâng cao kết quả học tập và trách nhiệm học tập của họ.

3. Kết luận

SNT là khả năng tự nhận thức về bản thân. Do đó, việc rèn luyện cho HS khả năng tự nhận thức về mình nói chung và khả năng tự nhận thức về việc học tập nói riêng là rất cần thiết. Bằng các hoạt động liên tưởng và huy động kiến thức, phát hiện và sửa chữa sai lầm trong giải toán và trong việc tổ chức cho HS nhìn bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau và mở rộng bài toán, HS đã được rèn luyện khả năng phát hiện và GQVĐ nhằm góp phần bồi dưỡng cho HS KN SNT: KN lập kế hoạch, lựa chọn chiến lược giải toán; KN theo dõi, nhận xét và điều chỉnh; KN đánh giá toàn bộ quá trình GQVĐ. Trong phạm vi nghiên cứu, chúng tôi đã xác định cơ sở lí luận của một số biện pháp sư phạm nhằm rèn luyện một số KN SNT nhằm thực hiện mục tiêu chương trình giáo dục phổ thông trong đó giúp HS phát triển "*phẩm chất, NL* *cần thiết đối với người lao động, ý thức và nhân cách công dân; khả năng tự học và ý thức học tập suốt đời; khả năng lựa chọn nghề nghiệp phù hợp với NL và sở thích, điều kiện và hoàn cảnh của bản thân để tiếp tục học lên, học nghề hoặc tham gia vào cuộc sống lao động; khả năng thích ứng với những đổi thay trong bối cảnh toàn cầu hóa và cách mạng công nghiệp mới"* [4; tr 6].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Emily L.Lai, (2011), *Metacognition: A literrature review*, Reseach report, Peason.

[2] T. Owen Jacobs - Zita M. Simutis, (1994), *Đào tạo kĩ năng siêu nhận thức để giải quyết vấn* đề, NXB Viện Nghiên cứu Quân đội Hoa Kì về Khoa học Hành vi và Xã hội.

[3] G. Polya, (1997), *Giải một bài toán như thế nào?*, NXB Giáo dục.

[4] Bộ Giáo dục và Đào tạo, (2017), *Chương trình Giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể*.

[5] Nguyễn Bá Kim, (2009), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.

[6] Ủy ban Khoa học về Hành vi xã hội và Giáo dục, (2007), *Phương pháp học tập tối ưu: Trí tuệ, tư duy, kinh nghiệm và nhà trường*, NXB Tổng hợp TP. Hồ Chí Minh.

[7] Brown A, (1987), *Metacognition, excutive control, self - regulation and other more mysterious machanisms*, in F. E Weinert.

[8] Douglas J. Hacker & John Dunlosky, (2009), *Handbook of metacognition in education*, Routlegde, NewYork.

[9] Gama C, (2004), *Intergrating metacognition instruction in Interactive learning environments*, submitted for the degree of D.phil university of Sussex.

[10] Schoenfeld, A, (1992), *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*, In D. Grouws (Ed.), Handbook for research on mathematics teaching and learning (pp. 334 - 370), New York: MacMillan.

PEDAGOGICAL SOLUTIONS FOR METACOGNITIVE SKILL PRACTICE TO FOSTER STUDENTS' ABILITY TO IDENTIFY AND SOLVE PROBLEM IN TEACHING SOLID GEOMETRY AT HIGH SCHOOLS

HOANG XUAN BINH
Hanoi University of Home Affairs
Email: hoangbinhncs@gmail.com

Abstract: *It is really necessary to teach students several metacognitive skills. These skills will foster their ability to identify and solve problem. In this article, the author focuses on researching and identifying pedagogical solutions to practise metacognitive skills so as to foster ability to identify and solve problem, as well as clarify the advantages of practising these skills to foster students' ability to identify and solve problems in teaching solid Geometry at high schools. Then, the author has proposed the application of metacognitive skills practice in Maths teaching at high schools in the future.*

Keywords: *Metacognitive skills; competence of problem identification and solving; solid Geometry; high schools.*