

# SỬ DỤNG PHƯƠNG TIỆN TRỰC QUAN TRONG DẠY HỌC NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

**TRẦN TRUNG**  
 Học viện Dân tộc  
 Email: trungt1978@gmail.com

**Tóm tắt:** Phương tiện trực quan đóng vai trò quan trọng trong dạy học toán không chỉ trong việc cung cấp cho học sinh những kiến thức bền vững, chính xác mà còn giúp các em kiểm tra lại tính đúng đắn của các kiến thức lí thuyết, sửa chữa và bổ sung, đánh giá lại chúng nếu không phù hợp với thực tiễn. Bài viết trình bày việc sử dụng phương tiện trực quan trong dạy học kiến thức nguyên hàm, tích phân ở trường trung học phổ thông nhằm giúp học sinh học tập hứng thú hơn, tăng cường sức chú ý đối với các hiện tượng nghiên cứu, thuận lợi trong tiến hành các quá trình phân tích, tổng hợp các hiện tượng để rút ra kết luận đúng đắn.

**Từ khóa:** Phương tiện trực quan; dạy học; nguyên hàm; tích phân; trung học phổ thông.

(Nhận bài ngày 11/10/2017; Nhận kết quả phản biện và chỉnh sửa ngày 17/11/2017; Duyệt đăng ngày 25/12/2017).

## 1. Đặt vấn đề

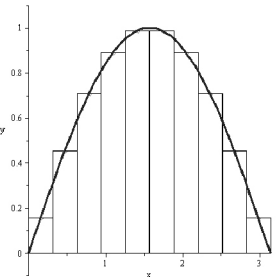
Trong thực tiễn dạy học, học sinh (HS) thường gặp một số chướng ngại nhận thức khi chuyển từ cụ thể lên trừu tượng và khi đi từ cái trừu tượng trở về với cái cụ thể trong tư duy. Khó khăn đó chủ yếu ở vấn đề khi tri giác cái cụ thể hiện thực, HS không biết phát hiện ra cái chung bản chất và chủ yếu ẩn nấp hoặc bị che lấp trong muôn vàn cái riêng không bản chất và thứ yếu của cái cụ thể; ngược lại, khi vận dụng khái niệm, định lí vào những trường hợp cụ thể thì HS lại lúng túng trong việc tìm ra cái riêng biệt đơn nhất, độc đáo của chúng mặc dù chúng đều có cùng một cái chung bản chất.

Mặt khác, không phải bất cứ cái cụ thể, hiện thực nào cũng có thể mang đến cho HS tri giác trực tiếp. Vì vậy, giáo viên (GV) cần tăng cường sử dụng phương tiện dạy học trực quan để giúp HS dễ dàng chuyển tư duy của mình từ diện cụ thể cảm tính sang diện trừu tượng, khái quát hóa và từ đó lên cái cụ thể trong ý thức. Kiến thức nguyên hàm, tích phân là chủ đề có tính trừu tượng cao nên GV trong dạy học cần khai thác phương tiện trực quan để giúp HS nắm vững cái bản chất, cái cụ thể của sự vật để từ đó giúp cho việc học tốt hơn nói chung và giúp cho các em có tư duy trong giải quyết bài toán thực tế.

## 2. Nội dung nghiên cứu

Do chương trình môn Toán ở phổ thông giảm bớt tính hàm lâm nên khái niệm tích phân hiện nay được xây dựng từ công thức Newton - Leibnit. Nhưng với các phương tiện dạy học hiện đại như hiện nay thì GV vẫn có thể truyền thụ được khái niệm này "gần" với bản chất của nó. Với tính năng mô tả trực quan và khả năng tính toán mạnh thì Maple có thể cho HS thấy được rằng diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ , trục hoành,  $x = a$  và  $x = b$  ( $f(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ ) bằng  $F(b) - F(a)$  với  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ .

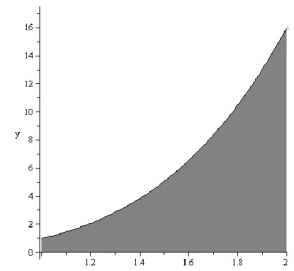
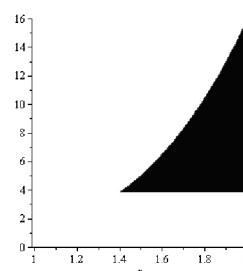
GV có thể thực hiện điều này với các hàm số khác nhau và kết hợp với chứng minh ở sách giáo khoa thì hiệu quả hơn việc chỉ đi chứng minh định lí. Việc được quan sát hình ảnh trực tiếp như thế HS sẽ nắm được bản chất của bài toán diện tích hình thang cong là "vết kiệt".



Sau khi thực hiện hoạt động quan sát trực quan thì GV nêu bài toán sau:

Bài toán 1. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^4$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1; x = 2$ .

Bài toán 2. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^4$ ,  $y = 4$  trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1; x = 2$ . hình ảnh minh họa và HS sẽ thấy được diện tích được tính bởi công thức  $S = S_1 - S_2$ . Với  $S_1, S_2$  lần lượt là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y = x^4, y = 1$  với trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1; x = 2$ .





Sau khi dạy định nghĩa tích phân, GV có thể cho HS thực hiện hoạt động nhận dạng với phiếu học tập:

Phiếu học tập	
So sánh các số sau:	
a	$\int_0^2 x dx$ và $\int_0^2 u dx$
b	$\int_{-1}^1 \sin x dx$ và $\int_{-1}^1 \sin u du$

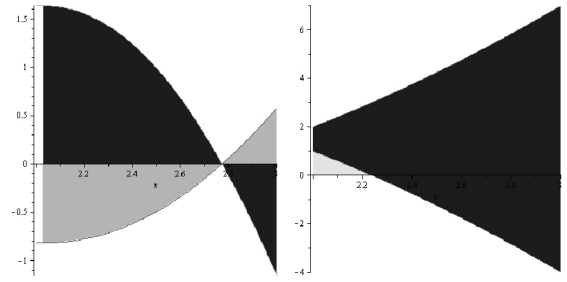
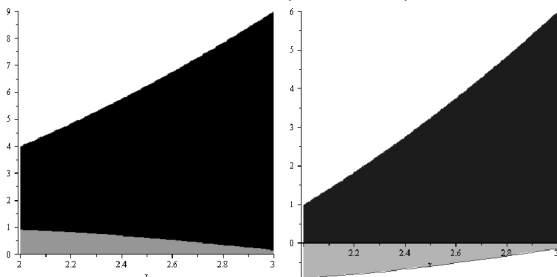
Từ kết quả này GV phân tích để HS thấy rằng: Tích phân không phụ thuộc biến mà chỉ phụ thuộc vào hàm số và đoạn lấy tích phân.

Tích phân có nhiều ứng dụng trong toán học và thực tế như: Tính quãng đường đi được của vật khi biết phương trình vận tốc, tính diện tích hình giới hạn bởi đồ thị các hàm số và các đường  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ), tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ) với giả thiết là biết được diện tích thiết diện của vật thể với mặt  $x = c, (a \leq c \leq b)$  là một hàm của biến  $c$ ; và bài toán tính thể tích của một vật thể tròn xoay sinh bởi một hình phẳng D khi quay quanh trục Ox hoặc Oy.

Khi dạy học ứng dụng tích phân tính diện tích của hình phẳng: Đây là một ứng dụng quan trọng của tích phân, có nhiều ý nghĩa trong thực tiễn. Sử dụng phương tiện trực quan không chỉ giúp HS học tốt nội dung này mà còn làm cho HS nhận thức sâu hơn bản chất của phép tính tích phân để có thể vận dụng kiến thức đã học vào thực tiễn cuộc sống. Phương tiện trực quan ở đây chủ yếu là các hình vẽ minh họa được thiết lập nhờ phần mềm và máy tính.

Từ công thức, sử dụng trực quan là đồ thị của hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  trên cùng một hệ trục tọa độ và hình ảnh diện tích tương ứng của hai hình lần lượt giới hạn bởi đồ thị các hàm  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  với trục Ox,  $x = a, x = b$ . GV nên cho HS nhận được hình ảnh với tuần tự các trường hợp như sau:

- Trên  $[a; b]$  hai hàm số có đồ thị nằm về hai phía của trục hoành.
- Trên  $[a; b]$  hai hàm số có đồ thị nằm về cùng một phía của trục hoành.
- Trên  $[a; b]$  chỉ có một đồ thị cắt trục hoành.
- Trên  $[a; b]$  cả hai đồ thị đều cắt trục hoành.



Sau khi quan sát các hình tương trưng cùng với sự phân tích của GV, HS có thể nhận thấy được là diện tích của hình giới bởi đồ thị của hai hàm số  $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$  và trục hoành được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

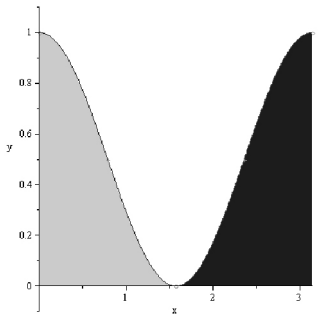
Sau khi nêu công thức, GV cho

HS củng cố lại phương pháp tính tích phân mà hàm dưới dấu tích phân nằm trong giá trị tuyệt đối và xét bài toán mà diện tích của hình được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số như hình bên. Từ hình minh họa cho HS xây dựng quy trình giải bài toán tính diện tích của hình thang cong.

GV có thể cho HS hoạt động nhận dạng và thể hiện lần lượt các bài toán sau:

Bài toán 1. (Bài tập 27, tr. 167 Giải tích 12 Nâng cao)

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị



hàm số  $y = \cos^2 x$ , trục hoành, trục tung và đường thẳng  $x = \pi$ .

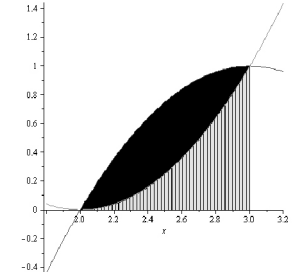
Diện tích cần tính là:

$$S = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left( \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2 + \sin 2}{4} (dvdt)$$

Bài toán 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

parabol  $y^2 = 8x$  và đường thẳng  $x = 2$ .

Với bài toán này HS có thể sẽ gặp khó khăn khi vận dụng công thức ở trên do HS không phát hiện ra hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  như trong công thức. Dựa vào trực quan giúp HS phát hiện ra hình



này được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số  $y = 2\sqrt{2x}$ ,  $y = -2\sqrt{2x}$  và đường thẳng  $x = 2$ ; và tính chất đối xứng của hình.

Suy ra diện tích được tính bởi công thức:

$$S = 2 \int_0^2 2\sqrt{2x} dx = 4\sqrt{2} \int_0^2 \sqrt{x} dx = \frac{16\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{x} \Big|_0^2 = \frac{32}{3} \quad (\text{đvdt})$$

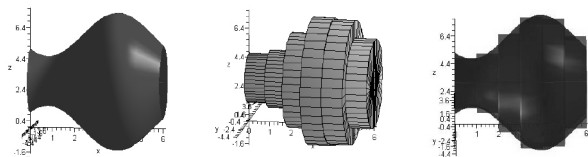
Tuy nhiên với HS khá có thể nhận ra rằng diện tích trên có thể được tính khi xem  $x$  là hàm của biến  $y$  và tính tương tự như biến  $x$ .

$$S = \int_{-4}^4 \left| \frac{y^2}{8} - 2 \right| dy = \int_{-4}^4 \left( 2 - \frac{y^2}{8} \right) dy = \left( 2x - \frac{y^3}{24} \right) \Big|_{-4}^4 = \frac{32}{3} \quad (\text{đvdt})$$

Khi GV dạy học ứng dụng tích phân tính thể tích của vật thể: Với tính năng minh họa trực quan của Maple 12 nhờ gói công cụ Volume of Revolution Tutor, GV có thể thực hiện việc chia một vật thể thành nhiều khối nhỏ hơn. Khi quan sát trực tiếp, GV có thể thay đổi linh hoạt số hình phân chia; quan sát hình nguyên bản, hình thay thế và đồng thời. Ngoài ra HS còn thấy được kết quả thể tích của vật thể và tổng thể tích của các hình được phân chia. Qua đó HS có thể liên tưởng lại bài toán tính diện tích hình thang cong, với sự tương ứng *chiều cao hình phẳng với diện tích mặt đáy vật thể*. Từ đó, nhận thức của

HS tiếp nhận công thức tính thể tích  $V = \int_a^b S(x) dx$  một

cách tự nhiên hơn. Công thức tính thể tích của vật thể tròn xoay được hình thành từ việc kết hợp trực quan với suy luận, GV có thể cho HS quan sát hình sau và trả lời các câu hỏi:



$$V = 193,256 \quad (\text{đvtt})$$

$$V = 193,496 \quad (\text{đvtt})$$

Câu hỏi 1: Để áp dụng công thức trên vào tính thể tích vật thể cần xác định được những yếu tố nào?

Câu hỏi 2: Khi cắt vật thể tròn xoay bởi một mặt phẳng vuông góc với trục thì thiết diện là hình gì?

Câu hỏi 3: Khi đó diện tích thiết diện  $S(x)$  được tính

bởi công thức nào?

Câu hỏi 4: Vậy thể tích có công thức tính như thế nào?

Hoạt động nhận dạng và thể hiện là ví dụ tính thể tích của khối chỏm cầu. Hoạt động tư duy tiếp theo có thể không cần trực quan, nếu GV thay đổi vai trò của  $x$  và  $y$  thì kết quả là công thức tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $x = g(y)$ ,

trục tung và các đường  $y = a, y = b$  quay quanh trục tung.

### 3. Kết luận

Trong dạy học toán việc sử dụng hợp lí các phương tiện trực quan đóng một vai trò rất quan trọng. Phương tiện trực quan không chỉ giúp cho việc minh họa và tập trung sự chú ý của HS vào những thuộc tính và đặc điểm bên ngoài của đối tượng và hơn thế phương tiện trực quan còn giúp HS nhanh chóng phát hiện những thuộc tính bên trong, những mối quan hệ bản chất của đối tượng và cho phép nhận ra nó như một cái toàn bộ thống nhất. Phương tiện trực quan không chỉ tham gia vào quá trình hình thành khái niệm mà còn hỗ trợ đắc lực cho dạy học định lí, dạy giải bài tập toán... phương tiện trực quan là cầu nối, là khâu trung gian trong giai đoạn trừu tượng hóa (từ cụ thể trừu tượng lên khái niệm lí thuyết) và cả trong giai đoạn cụ thể hóa (tái tạo ra cái cụ thể trong tư duy).

Dạy học nguyên hàm, tích phân, GV cần chú trọng việc sử dụng phương tiện trực quan để giúp HS xây dựng tri thức. Trong việc sử dụng phương tiện trực quan, GV cần khai thác khả năng của mỗi loại phương tiện vì mỗi loại có vai trò và chức năng khác nhau đối với từng nội dung và từng thời điểm. Vì thế cần phải khai thác phương tiện trực quan một cách thích hợp và đặc biệt nên sử dụng mô hình thực tế.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Tô Xuân Giáp, (1992), *Phương tiện dạy học (hướng dẫn chế tạo và sử dụng)*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp.
- [2] Phó Đức Hòa - Ngô Quang Sơn, (2008), *Ứng dụng công nghệ thông tin trong dạy học tích cực*, NXB Giáo dục.
- [3] Nguyễn Bá Kim, (2006), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm.
- [4] Trần Trung, (2011), *Ứng dụng công nghệ thông tin vào dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Giáo dục Việt Nam.

## VISUAL AIDS IN TEACHING PRIMITIVE AND INTEGRAL AT HIGH SCHOOLS

TRAN TRUNG

Vietnam Academy for Ethnic Minorities

Email: [trungt1978@gmail.com](mailto:trungt1978@gmail.com)

**Abstract:** Visual aids play an important role in Mathematics teaching, it is not only providing students with exact, accurate knowledge, but also helping them test the correctness of theoretical knowledge; correct, repair, supplement and re-evaluate it if it does not fit the reality. The article presents the use of visual aids in teaching the primitive and integral knowledge at high school to help students develop learning interest, increase attention to research phenomena, facilitate the processes of analysis, synthesis of phenomena to draw the right conclusion.

**Keywords:** Visual aids; teaching; primitive; integral; high schools.