



KHAI THÁC LỜI GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC HỌA HÌNH SỬ DỤNG PHÉP THAY MẶT PHẪNG HÌNH CHIẾU

ĐỖ THỊ TRINH

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên
Email: dothitinh@gmail.com

Tóm tắt: Trong các trường đại học khối kĩ thuật, Hình học Họa hình là học phần trang bị kiến thức và kĩ năng giúp người học đọc hiểu và thiết kế được những bản vẽ kĩ thuật. Bài viết trình bày việc khai thác lời giải của một số bài toán Hình học Họa hình sử dụng phép thay mặt phẳng hình chiếu nhằm giúp người học thấy được sự cần thiết của việc đưa bài toán về trường hợp đặc biệt. Qua đó, tư duy thuật toán được phát triển và từng bước rèn luyện khả năng tự học, tự giải quyết vấn đề cho người học. Người học có cơ hội thuận lợi tìm hiểu và phát triển tư duy thuật toán đối với các dạng bài toán liên quan.

Từ khóa: Hình học Họa hình; phép thay mặt phẳng hình chiếu; thuật giải.

(Nhận bài ngày 15/8/2017; Nhận kết quả phản biện và chỉnh sửa ngày 21/8/2017; Duyệt đăng ngày 25/9/2017).

1. Đặt vấn đề

Nền kinh tế tri thức hiện nay đòi hỏi mỗi người phải nắm bắt được những quy luật của tự nhiên và xã hội. Để có được điều đó, giáo dục phải coi trọng việc phát triển tư duy, dạy cách học, cách suy nghĩ giải quyết vấn đề cho người học.

Trong các trường đại học khối kĩ thuật, Hình học Họa hình là môn học nghiên cứu các hình không gian trên hai mặt phẳng hình chiếu (MPHC) vuông góc với nhau. Học phần này trang bị kiến thức, kĩ năng giúp người học đọc hiểu và thiết kế được những bản vẽ kĩ thuật. Tuy nhiên, đa số các bài toán Hình học Họa hình đều được xác định ở trường hợp tổng quát, trong khi cũng với các bài toán đó khi xét ở các trường hợp hay vị trí đặc biệt sẽ cho lời giải ngắn gọn dễ hiểu, đồng thời người học dễ dàng liên tưởng tới các bài toán thực tế của Vẽ kĩ thuật. Bên cạnh đó, việc đưa một bài toán dạng tổng quát về các trường hợp đặc biệt giúp người học nhận định, phân tích và tìm ra được thuật toán ẩn tàng trong đó. Thực tế cho thấy, đa số sinh viên (SV) chưa có tư duy thuật toán (TDTT) hoặc chưa vận dụng TDTT hợp lí và linh hoạt. Điều này cản trở tính sáng tạo của người học trong việc sử dụng, khai thác các kiến thức đã được trang bị để giải quyết các tình huống mới được đặt ra.

Bài báo này trình bày việc khai thác lời giải của một số bài toán Hình học Họa hình sử dụng phép thay MPHC nhằm giúp người học thấy được sự cần thiết của việc đưa bài toán về trường hợp đặc biệt, qua đó phát triển TDTT và từng bước rèn luyện khả năng tự học, tự giải quyết vấn đề cho người học.

2. Khai thác lời giải một số bài toán Hình học Họa hình sử dụng phép thay mặt phẳng hình chiếu

2.1. Tầm quan trọng của tư duy thuật toán

Nguyễn Bá Kim [1] đã giới thiệu khái niệm *thuật toán (thuật giải)*: “Thuật toán được hiểu như một quy tắc

mô tả những chỉ dẫn rõ ràng và chính xác để người (hay máy) thực hiện một loạt các thao tác nhằm đạt được mục đích đề ra hay giải một lớp bài toán nhất định. Đây chưa phải một định nghĩa chính xác mà chỉ là cách phát biểu giúp ta hình dung khái niệm thuật toán một cách trực giác”. Bên cạnh đó, Nguyễn Bá Kim nêu lên khái niệm *quy tắc tựa thuật giải* cũng như đặt vấn đề về rèn luyện tư duy thuật giải trong dạy học giải một số bài toán. Đồng nhất giữa các tác giả trong và ngoài nước, các nhà nghiên cứu đều khẳng định: Việc phát triển TDTT trong nhà trường là rất cần thiết. Nghiên cứu về dạy học cũng như phát triển TDTT đã có rất nhiều công trình của các tác giả như: Vũ Quốc Chung về bồi dưỡng một số năng lực tư duy cho học sinh các lớp cuối bậc Tiểu học; công trình của Nguyễn Thái Hòa về rèn luyện tư duy cho học sinh qua giải bài tập toán; Nguyễn Văn Thuận (2004) về phát triển tư duy logic cho học sinh; Trần Luận về bồi dưỡng tư duy sáng tạo cho học sinh...

Tác giả Gerald Futschek cho rằng: TDTT được thể hiện bởi khả năng thiết kế và hiểu các thuật toán; Khả năng phân tích vấn đề được đưa ra; Khả năng xác định một vấn đề chính xác; Khả năng tìm kiếm các hành động cơ bản đủ để xác định các vấn đề; Khả năng xây dựng một thuật toán chính xác để giải quyết vấn đề nhất định bằng cách sử dụng những hành động cơ bản; Khả năng suy nghĩ về tất cả các trường hợp đặc biệt và bình thường của một vấn đề; Khả năng để nâng cao hiệu quả của một thuật toán. Nếu muốn thiết kế các thuật toán để giải quyết được vấn đề thì người đó cần có khả năng TDTT [2].

Marasaeli, Jacob Perrenet, Wim M.G. Jochems, Bert Zwaneveld (2011) [3] đã đề xuất bốn cấp độ trừu tượng trong TDTT của SV tương ứng với bốn cấp độ trừu tượng của thuật toán như sau: (1) Cấp độ thực hiện; (2) Cấp độ chương trình; (3) Cấp độ đối tượng; (4) Cấp độ bài toán. Theo COMAP (Consortium for Mathematics and Its

Applications) (1997) [4]: “TDTT” là một loại tư duy toán học. Các biểu hiện của TDTT là: a) Áp dụng các thuật toán; b) Phát triển các thuật toán; c) Phân tích các thuật toán; d) Ghi nhận các vấn đề mà không có giải pháp thuật toán.

Như vậy, chúng ta đều nhận thấy vai trò và tầm quan trọng của thuật toán cũng như TDTT. Tuy nhiên, nội dung bài báo không đặt vấn đề dạy học thuật toán mà mục đích muốn phát triển TDTT cho người học thông qua khai thác lời giải của một lớp bài toán đặc trưng.

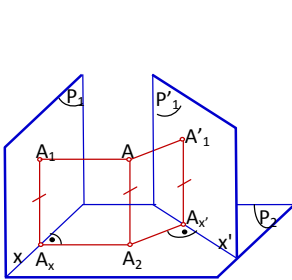
2.2. Kiến thức cơ sở

Trước hết, ta nhắc lại một số kiến thức cơ bản khi thay MPH: *a) Thay MPH đứng (P₁)*

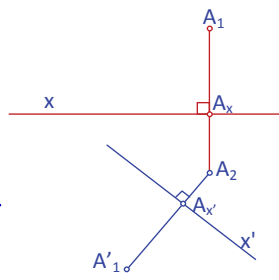
Khi xây dựng hình biểu diễn của điểm A nếu ta thay (P₁) bằng (P₁') ⊥ (P₂), giữ nguyên vị trí của (P₂), điểm A (Hình 1) thì hình chiếu bằng A₂ và độ cao của điểm A không thay đổi.

Việc thay MPH đứng (P₁) thực hiện trên hình biểu diễn như sau (Hình 2):

- Thay trục x (là giao tuyến của (P₁) và (P₂)) bằng trục x' (là giao tuyến của (P₁') và (P₂)).
- Thay hình chiếu đứng A₁ của A bằng A'₁ sao cho A₂A'₁ ⊥ x' và A₁A_x = A'₁A_x.



Hình 1



Hình 2

b) Thay MPH bằng (P₂)

Nếu thay (P₂) bằng (P₂') ⊥ (P₁), giữ nguyên vị trí của (P₁) và điểm A thì hình chiếu đứng, độ xa của điểm A không thay đổi (Hình 3).

Việc thay MPH bằng (P₂) thực hiện trên hình biểu diễn như sau (Hình 4):

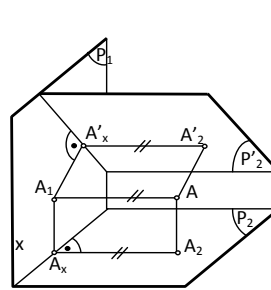
- Thay trục x bằng x' (là giao tuyến của (P₁) và (P₂')).
- Thay hình chiếu bằng A₂ của A bằng A'₂ sao cho A₁A'₂ ⊥ x' và A₂A_x = A'₂A_x.

Như vậy, tùy thuộc đặc thù mỗi bài toán, người học có thể lựa chọn việc thay MPH đứng hoặc MPH bằng. Với một số bài toán phức tạp, ta có thể thay liên tiếp các MPH để đạt được mục tiêu của bài toán.

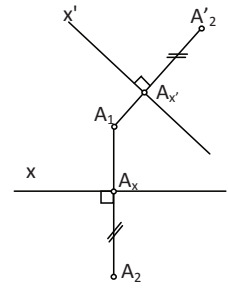
Khai thác thuật toán qua một vài ví dụ điển hình

Ví dụ: (Xác định góc giữa hai mặt phẳng) Cho mặt phẳng (P) = (V₁P ∩ V₂P) và mặt phẳng (Q) = (V₁Q ∩ V₂Q). Xác định góc giữa (P) và (Q)?

Với bài toán này, SV đã biết hai cách xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) trong chương trình Hình học ở Trung học phổ thông. Bởi vậy, giảng viên chỉ cần SV nhắc lại hai cách này và dựa vào đó để đề xuất hai thuật toán giải bài toán. Ngoài ra, với một số trường hợp



Hình 3



Hình 4

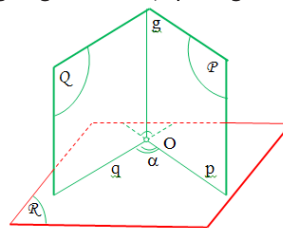
đặc biệt, giảng viên có thể gợi ý cho SV xét trường hợp đặc biệt: Khi giao tuyến g của (P) và (Q) là đường thẳng chiếu (khi đó góc giữa hai hình chiếu (đã suy biến thành đường thẳng) của (P) và (Q) trên mặt phẳng hình chiếu này chính là góc α cần tìm) và có thể sử dụng phép thay MPH đưa bài toán đã cho về trường hợp đặc biệt này để có thêm một cách giải khác.

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

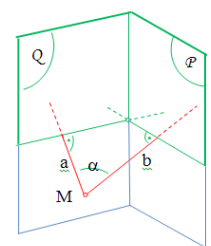
- Bước 1:* Xác định giao tuyến g = (P) ∩ (Q);
- Bước 2:* Xác định mặt phẳng (R) ⊥ g;
- Bước 3:* Xác định các giao tuyến: p = (R) ∩ (P) và q = (R) ∩ (Q);
- Bước 4:* Xác định góc α giữa p và q (α cũng chính là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)) (Hình 5).

Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

- Bước 1:* Xác định pháp tuyến a của mặt phẳng (P);
- Bước 2:* Xác định pháp tuyến b của mặt phẳng (Q);
- Bước 3:* Xác định góc α giữa a và b (α cũng chính là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)) (Hình 6).



Hình 5



Hình 6

Trong Hình học Họa hình, ta cũng có 2 cách tương ứng. Thuật toán xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) đã cho như sau:

- Nếu giao tuyến g = (P) ∩ (Q) là đường thẳng chiếu ((R) trùng với một MPH nào đó) thì góc giữa hai hình chiếu (đã suy biến thành đường thẳng) của (P) và (Q) trên MPH này chính là góc α cần tìm.
- Nếu qua điểm M (bất kì) ta vẽ các đường thẳng e ⊥ (P) và f ⊥ (Q) thì góc (e, f) = góc (P, Q)

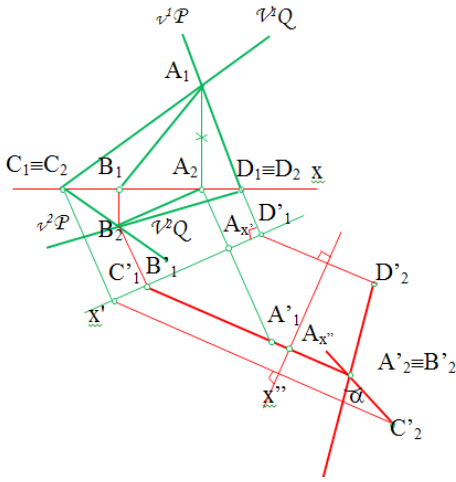
Từ đó, thuật toán giải bài toán như sau (Đồ thức minh họa trên Hình 7):

Bước 1: Vẽ giao tuyến AB = (P) ∩ (Q) (A = V₁P ∩ V₁Q; B = V₂P ∩ V₂Q).

Bước 2: Thay MPH đứng (P₁) để AB trở thành đường chiếu đứng mới của (Q) ta lấy điểm C ∈ (Q) và xác định Q bằng ba điểm (A, B, C). (P) xác định bằng ba điểm (A, B, D) với D = x ∩ (P).

Bước 3: Thay MPH bằng (P₂) để đường mặt AB trở

thành đường chiếu bằng: lấy $x'' \perp A_1B_1'$. Hình chiếu bằng mới của Q suy biến thành đường thẳng A_2C_2' ; của (P) suy biến thành đường thẳng A_2D_2' và góc $(A_2C_2', A_2D_2') = \alpha = \text{góc}(P, Q)$.



Hình 7

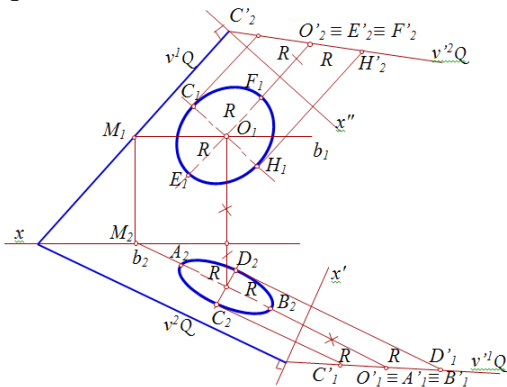
Ví dụ 1: Cho mặt phẳng $(Q) = (V_1Q \cap V_2Q)$, hình chiếu bằng O_2 của điểm $O \in (Q) (V_1Q \cap V_2Q)$. Hãy vẽ các hình chiếu của đường tròn $(e) \in (Q)$ có tâm là O và bán kính bằng R cho trước.

Phân tích bài toán: Nếu (Q) là mặt phẳng chiếu, khi đó hình chiếu tương ứng của (Q) trùng vết của mặt phẳng (Q), vết đó chứa hình chiếu tương ứng của đường tròn (e). Từ đó, thuật toán giải bài toán như sau (Hình 8):

Bước 1: Trước hết xác định hình chiếu đứng O_1 của tâm O bằng cách gắn O vào đường bằng $b \in (Q)$. Thay MPHÇ hai lần.

Bước 2: Thay (P_1) bằng $(P_1') \perp V_2Q$ để (Q) trở thành mặt phẳng chiếu đứng $(x' \perp V_2Q)$ và vẽ elip hình chiếu bằng của (e).

Bước 3: Thay (P_2) bằng $(P_2') \perp V_1Q$ để (Q) trở thành mặt phẳng chiếu bằng $(x'' \perp V_1Q)$ và vẽ elip hình chiếu đứng của (e).



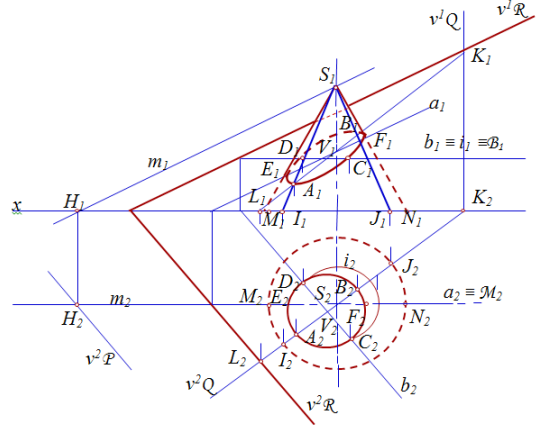
Hình 8

Ví dụ 2: Tìm giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng (R) với hình nón tròn xoay. Xét thấy khuất của giao tuyến và của hình nón.

Cách 1: Dùng mặt phẳng phụ trợ (Hình 9).
Bước 1: Để xác định dạng của giao tuyến $(R \cap \text{nón})$, ta vẽ qua S mặt phẳng $P // R$.

Bước 2: Cắt (R) và nón bằng (Q) - mặt phẳng chiếu bằng qua trục nón và vuông góc với (R) $(V_2Q \cap V_2R)$.

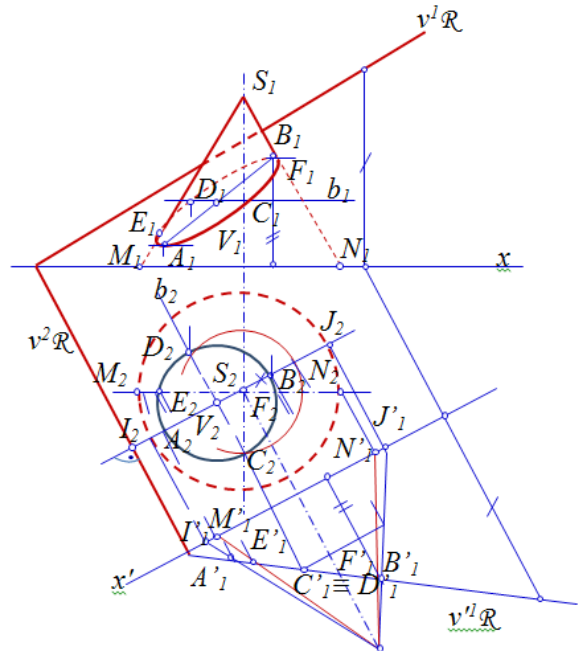
Bước 3: Dụng qua V mặt phẳng bằng B, tìm giao tuyến $b = B \cap R$, giao tuyến $(i) = B \cap \text{nón}$ ((i) là một vĩ tuyến của nón) và các giao điểm $C, D = b \cap (i)$.



Hình 9

Cách 2: Dùng phép biến đổi hình chiếu
Nếu mặt phẳng cắt (R) là mặt phẳng chiếu đứng thì việc xác định giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng với mặt nón tròn xoay là bài toán khá quen thuộc và đơn giản đối với người học. Từ đó, bài toán có thể giải quyết như sau:

Thay MPHÇ đứng (P_1) để (R) trở thành mặt phẳng chiếu đứng và đưa kết quả về hình dạng ban đầu (Hình 10).



Hình 10

Nhận xét: Có thể nhận thấy cách giải thứ hai dễ dàng thực hiện và gần gũi với người học hơn.

3. Kết luận

Qua việc phân tích, khai thác việc sử dụng phép thay MPHC để đưa một bài toán trong trường hợp tổng quát về trường hợp đặc biệt, ta nhận được lời giải hay với kết quả đẹp, gần gũi với người học trong cách tư duy cũng như góc nhìn cho các bài toán. Qua đó, người học có cơ hội thuận lợi tìm hiểu và phát triển TĐTT đối với các dạng bài toán liên quan.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Bá Kim, (2011), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
 [2]. Gerald Futschek, (2006), *Algorithmic Thinking: The Key for Understanding Computer Science*, Vienna University of Technology Institute of Software Technology and Interactive Systems Favoritenstrasse 9, 1040 Vienna,

Austria.

[3]. Mara Saeki - Jacob Perrenet - Wim M.G. Jochems - Bert Zwaneveld, (2011), *Teaching Programming in Secondary School: A Pedagogical Content Knowledge Perspective*, Informatics in Education, 2011, Vol. 10, No. 1, 73-88 73, Vilnius University.

[4]. Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP), (1997), *For all practical purposes: introduction to contemporary mathematics*, 4th edition. WH Freeman Company, NY: Consortium for Mathematics and Its Applications.

[5]. Nguyễn Quang Cự - Nguyễn Mạnh Dũng, (2004), *Hướng dẫn giải bài toán Hình học Họa hình*, NXB Xây dựng.

[6]. Nguyễn Đình Điện - Đỗ Mạnh Mẫn, (2006), *Hình học Họa hình - Tập 1*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[7]. Nguyễn Bá Kim, (2015), *Phương pháp dạy học môn Toán (Tái bản lần thứ 7)*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.

EXPLORING SOLUTIONS OF SEVERAL GRAPHIC GEOMETRY EXERCISES THAT USE PROJECTION PLANE REPLACEMENT

DO THI TRINH

Thai Nguyen University of Education - Thai Nguyen University

Email: dothitrinh@gmail.com

Abstract: *Graphic Geometry is a course to equip students with knowledge and skills so that they can understand and design technical drawings at the technical universities. The article presents the exploration of solutions to Graphic Geometry exercises that replace projection plane to help learners see the necessity of taking exercises to the special case. Then, algorithmic thinking is developed and gradually practise learners' self-learning and problem-solving. Learners have opportunities to learn and develop algorithmic thinking for involved types of problems.*

Keywords: *Graphic Geometry; solution of projection plane replacement; algorithm.*