KHAI THÁC VẺ ĐẸP VỀ TÍNH THỐNG NHẤT CỦA TOÁN HỌC THÔNG QUA GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ HÓA

NGUYỄN THÀNH QUANG - Trường Đại học Vinh
Email: ntquang144@yahoo.com
NGUYỄN VĂN THÀ - Trường THPT Phùng Hưng - TP. Hồ Chí Minh
Email: thamaths@gmail.com

Tóm tắt: *Phương pháp đại số hóa một số bài toán hình học theo hướng khai thác vẻ đẹp thống nhất của Toán học nhằm động cơ gợi mở, tạo hứng thú, xây dựng lòng tin trong học tập để phát huy tối đa năng lực sáng tạo cho học sinh. Cùng với cách giải toán bằng hình học truyền thống, học sinh cần được hướng dẫn để giải toán hình học bằng phương pháp đại số hóa cùng những kĩ năng chuyển đổi một bài toán từ lĩnh vực này thành một bài toán của lĩnh vực khác trong sự thống nhất trọn vẹn của Toán học. Từ đó, kích thích tính tò mò và sáng tạo, góp phần nâng cao kĩ năng tiếp cận giải quyết vấn đề trong học tập môn Toán cũng như trong cuộc sống cho học sinh.*

Từ khóa: *Toán học; bài toán Hình học phẳng; phương pháp Đại số hóa.*

(Nhận bài ngày 19/7/2016; Nhận kết quả phản biện và chỉnh sửa ngày 18/8/2016; Duyệt đăng ngày 25/8/2016).

1. Đặt vấn đề

Những khái niệm, kết quả cũng như phép suy luận và phương pháp toán học ngày càng thâm nhập sâu vào các lĩnh vực của đời sống con người. Ngày nay, ranh giới giữa các ngành Toán học đã là một khối thống nhất. Các quan hệ hình học đều có thể biểu diễn bằng những phương trình đại số thông qua công cụ toạ độ.

Việc tìm tòi nhiều lời giải bằng các ngôn ngữ khác nhau cho một bài toán Hình học giúp giáo viên (GV) và học sinh (HS) nhận thức được giá trị thẩm mĩ của Toán học, có tác dụng thiết thực trong việc gợi mở khả năng tư duy, năng lực sáng tạo. Cùng với cách giải toán bằng Hình học truyền thống, HS cần được hướng dẫn để giải toán Hình học bằng phương pháp Đại số hóa cùng với những kĩ năng (KN) chuyển đổi một bài toán từ lĩnh vực này thành một bài toán của lĩnh vực khác trong sự thống nhất trọn vẹn của Toán học. Phương pháp này tạo ra tiếp cận mới sinh động, giúp người học khai thác tối đa khả năng của bản thân, tạo niềm vui khám phá và sáng tạo.

Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng phương pháp và công cụ Đại số để giải một số bài toán Hình học phẳng. Tư tưởng của việc thực hiện các chứng minh này chính là khai thác vẻ đẹp thẩm mĩ về tính thống nhất của Toán học trong dạy và học Hình học. Những tìm tòi này góp phần tích cực hóa hoạt động học tập môn Toán nói chung và phân môn Hình học nói riêng cho HS ở các trường phổ thông.

2. Đại số hóa bài toán Hình học

Chúng ta sử dụng công cụ Đại số để diễn đạt các bài toán Hình học bằng ngôn ngữ phương trình. Hơn nữa, các quan hệ vuông góc, song song, liên thuộc, giao cắt... trong Hình học khi diễn đạt bằng ngôn ngữ phương trình trong Đại số rất tiện lợi và hiệu quả. Đại số có lợi thế là chặt chẽ, mạch lạc, logic, có nhiều quy trình và thuật toán chuẩn, phù hợp với tâm lí tiếp nhận, khám phá của HS. Do đó, phương pháp này giúp HS khi giải toán Hình học tránh được những kĩ thuật quá đặc biệt, lắt léo, không phổ biến.

Đại số hóa một bài toán Hình học có thể đưa việc giải bài toán Hình học đó về thực hiện trên máy tính bằng các phần mềm Tin học tương thích. Chẳng hạn, lời giải của nhiều bài toán Hình học phẳng có thể thực hiện trên máy tính bởi phần mềm Maple nhờ công cụ toán học là lí thuyết cơ sở Grobner [1].

Cơ sở của phương pháp dựng hình bằng công cụ Đại số dựa vào nhận xét: Mỗi phép dựng hình đều có thể đưa về tìm nghiệm của một hệ phương trình Đại số nào đó. Chẳng hạn, các phép dựng hình bằng thước kẻ và compa đều đưa đến việc dựng các đường thẳng, đường tròn và tìm giao điểm của chúng. Khi biểu diễn các hình phẳng trong tọa độ Descartes (Đề - các) vuông góc, hầu hết các hình hình học hoặc biên của chúng có thể xem là tập các nghiệm của các đa thức và những quan hệ giữa chúng đều có thể mô tả bằng các phương trình đa thức. Chúng ta xét trên mặt phẳng hay không gian thực nên các đa thức cũng như tập các nghiệm phải xét trên trường số thực. Vì vậy, có thể Đại số hóa một định lí hay bài toán Hình học phẳng dưới dạng sau:

Giả thiết:

Cho hệ phương trình $f_1 = 0, f_2 = 0, \cdots, f_s = 0.$ *Kết luận:* Khi đó mọi nghiệm thực của hệ trên phải thỏa mãn hệ phương trình $g_1 = 0, g_2 = 0, \cdots, g_r = 0,$ trong đó:

$f_1, f_2, \ldots, f_s, g_1, g_2, \ldots, g_r \in \mathbb{R}[u_1, \ldots, u_t, x_1, \ldots, x_n]$ là các đa thức với hệ số thực. Các biến độc lập $u_1, u_2, \ldots, u_t$ là tọa độ của các điểm tương ứng và có thể chọn tùy ý; các biến $x_1, \ldots, x_n$ là phụ thuộc, nghĩa là mỗi biến phải xuất hiện trong ít nhất một đa thức f_i nào đó. Khi $r = 1$, g_1 được kí hiệu là g.

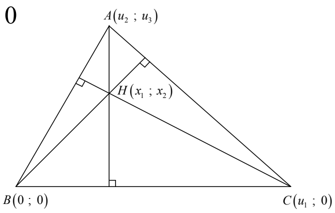
Ví dụ 1: *Chứng minh rằng trong tam giác ABC ba đường cao đồng quy*

Chọn hệ trục tọa độ $B(0;0), C(u_1;0), A(u_2;u_3)$ và $H(x_1;x_2)$. Trong đo u_1, u_2, u_3 là các biến độc lập, x_1, x_2 là các biến phụ thuộc. Giả sử BH ⊥ AC, CH ⊥ AB. Ta cần chứng minh AH ⊥ BC. Khi đó, các tính chất hình học sẽ mô tả bởi các phương trình đại số như sau:

Điều kiện BH ⊥ AC cho ta $f_1 := x_1(u_2 - u_1) + x_2 u_3 = 0$

Điều kiện CH ⊥ AB cho ta $f_2 := u_2(x_1 - u_1) + u_3 x_2 = 0$

Từ đó, điều kiện cần chứng minh là AH ⊥ BC trở thành: $g := u_1(u_2 - x_1) = 0$.



Hình 1

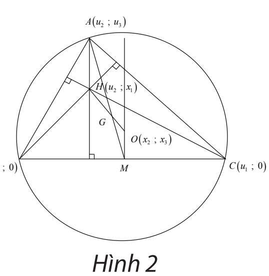
Như vậy, chúng ta đã Đại số hóa bài toán Hình học này thành bài toán: *Giả thiết:* Cho hệ hai phương trình $f_1 = 0$, $f_2 = 0$.

Kết luận: Khi đó mọi nghiệm thực của hệ hai phương trình trên phải thỏa mãn phương trình $g = 0$. Thật vậy, ta có $g = f_1 - f_2$ nên khi $f_1 = 0$ và $f_2 = 0$ thì $g = 0$.

Ví dụ 2 (Định lí Euler): *Chứng minh rằng trong tam giác ABC trực tâm H, trọng tâm G và tâm O của vòng tròn ngoại tiếp tam giác thẳng hàng*

Đại số hóa bài toán như sau: Chọn hệ trục tọa độ sao cho $B(0;0)$, $C(u_1;0)$, $A(u_2;u_3)$, $H(u_2;x_1)$; $G\left(\frac{u_1+u_2}{3};\frac{u_3}{3}\right)$, $O(x_2;x_3)$.

Ta có G là trọng tâm của tam giác ABC và AH ⊥ BC; điều kiện O là tâm đường tròn ngoại tiếp tương đương với hai điều kiện OB=OA, OB=OC. Bằng cách chọn hệ trục toạ độ như vậy, các tính chất hình học sẽ được mô tả bởi các phương trình đại số như sau: Điều kiện BH ⊥ AC tương đương với $u_2(u_2 - u_1) + x_1(u_3 - 0) = 0$, Hay $f_1 := u_2^2 - u_2 u_1 + x_1 u_3 = 0$



Hình 2

$$OA = OB \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 = (x_2 - u_2)^2 + (x_3 - u_3)^2,$$

$$OA = OB \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 = (u_2 - x_2)^2 + x_3^2.$$

Do đó $f_2 := u_2{}^2 + u_3{}^2 - 2x_2u_2 - 2x_3u_3 = 0$ (2),

$f_3 = u_1{}^2 - 2u_1x_2 = 0$

Ta có: $\overrightarrow{HO} = (x_2 - u_2, x_3 - x_1)$,

$\overrightarrow{GO} = \left(x_2 - \frac{u_1+u_2}{3}, x_3 - \frac{u_3}{3}\right)$

Vì vậy, điều kiện ba điểm H, G, O thẳng hàng là:

$$(x_2 - u_2)\left(x_3 - \frac{u_3}{3}\right) = (x_3 - x_1)\left(x_2 - \frac{u_1+u_2}{3}\right)$$

Hay $g := -2u_2x_3 - x_2u_3 + u_2u_3 + x_3u_1 + x_1 3x_2 - x_1u_1 - x_1u_2 = 0$.

Như vậy, chúng ta đã Đại số hóa bài toán Hình học này thành bài toán: *Giả thiết:* Cho hệ ba phương trình $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$. *Kết luận:* Khi đó, mọi nghiệm thực của hệ ba phương trình trên phải thỏa mãn phương trình g = 0.

Thật vậy, vì $u_1u_3 \neq 0$, nên từ $f_3 = 0$ suy ra $u_1 = 2x_2$.

Từ $f_3 = 0, f_3 = 0$

Ta có $u_3{}^2 + u_2(u_1 - 2x_2) - 2x_3u_3 - x_1u_3 = 0$

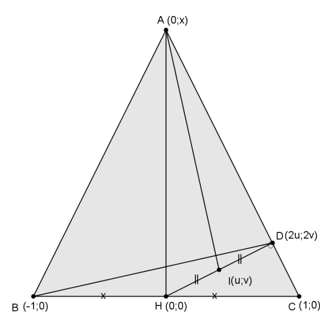
hay $u_3 = 2x_3 + x_1$.

Từ đó:

$$\begin{aligned} g &= (-2u_2x_3 + u_2u_3 - x_1u_2) + (x_3u_1 + 3x_1x_2 - x_1u_1) - x_2u_3 \\ &= u_2(u_3 - 2x_3 - x_1) + (2x_3x_2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_2) - x_2u_3 \\ &= u_2(u_3 - 2x_3 - x_1) + x_2(2x_3 + x_1 - u_3) = 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: *Cho tam giác ABC cân tại A, H là trung điểm BC, D là hình chiếu của H lên AC, I là trung điểm HD. Chứng minh rằng AI ⊥ BD.*

Ta thấy *AH* ⊥ *BC* tại *H* nên việc Đại số hóa bài toán này sẽ khá thuận lợi. Ta chọn *H* làm gốc tọa độ. Tuy chưa biết độ dài HB, HC nhưng do tam giác đã cho là tam giác cân nên ta chọn ngay HB=HC=1. Khi đó, ta chỉ cần chọn tọa độ của *I* rồi tính tọa độ của *D* và chứng minh điều kiện vuông góc.



Hình 3

Chọn hệ trục tọa độ sao cho H(0;0), B(-1;0); C(1;0), A(0;x), I(u,v), D(2u,2v).

Điều kiện HD ⊥ AC tương đương với $-2u + 2xv = 0$, hay $f_1 = -u + xv = 0$.

Điều kiện D nằm trên AC tương đương với $2u.2v = (2v - x)(2u - 1)$, hay $f_2 = 2xu + 2v - x = 0$

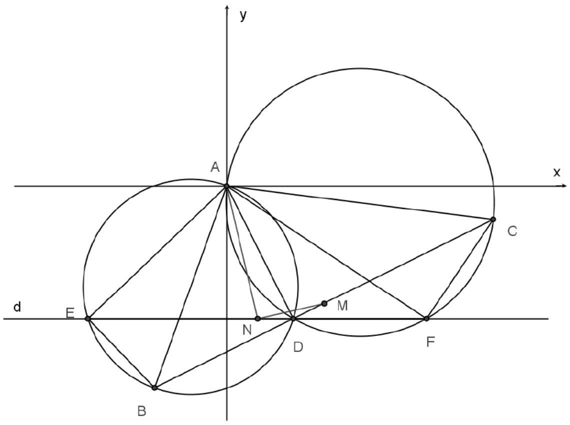
Điều kiện để AI $\perp$BD tương đương với $u(2u+1)+(v-x)2v=0$, hay $g=2u^2+u+2v^2-2vx=0$

Như vậy, chúng ta đã Đại số hóa bài toán Hình học này thành bài toán: *Giả thiết:* Cho hệ hai phương trình $f_1=0, f_2=0$. *Kết luận:* Mọi nghiệm thực của hệ hai phương trình trên phải thỏa mãn phương trình g = 0.

Từ $f_1=0$ suy ra $u=xv$, do đó $f_2=2x^2v+2v-x$.

Vì vậy, từ $f_2=0$, ta có $g=2x^2v^2+2v^2-xv=vf_2=0$.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC với đường cao AD, d là đường thẳng đi qua D, lấy E, F $\in$ d, không trùng với D sao cho AE$\perp$EB, AF$\perp$FC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và EF. Chứng minh rằng AN$\perp$MN.



Hình 4

Nhìn vào Hình 4, GV và HS có thể thấy việc chứng minh trực tiếp bằng Hình học gặp nhiều khó khăn, phức tạp. Với chú ý rằng, trong các giả thiết đã cho có đến yếu tố vuông góc và yếu tố ba điểm thẳng hàng, chính điều này nảy sinh ý tưởng Đại số hóa bài toán. Ta sẽ chọn *A* là gốc tọa độ và đặt tọa độ cho ba điểm *D, E, F*. Từ đó, sử dụng các điều kiện vuông góc để viết phương trình các đường thẳng thẳng *AD, AE, AF, BC, BE, CF* để tìm ra tọa độ của các điểm *B, C, M*. Tiếp đó, GV yêu cầu HS kiểm tính vuông góc bằng công cụ tích vô hướng. Nếu đặt tọa độ bất kì cho *D, E, F* thì dùng 6 ẩn số sẽ quá phức tạp. Do đó, để đơn giản hơn, ta gán tung độ của *D,E,F* bằng -1 hay nói cách khác, ba điểm này nằm trên đường thẳng y=-1. Lúc này bài toán chỉ còn 3 ẩn số.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho A(0;0), Ax//d, $D(d;-1), E(e;-1), F(f,-1)$ với d, e, f đôi một khác nhau.

Ta có $N\left(\frac{e+f}{2};-1\right)$. Phương trình các đường thẳng lần lượt như sau: $AD: x+dy=0;\quad AE: x+ey=0;$

$AF: x+fy=0;\quad BC: dx-y-d^2-1=0;$

$BE: ex-y-e^2-1=0;\quad CF: fx-y-f^2-1=0$

Tọa độ các điểm lần lượt là: $B(d+e;de-1)$; $C(d+f;df-1)$; $M\left(d+\frac{e+f}{2};\frac{de+df}{2}-1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{e+f}{2};-1\right)$; $\overrightarrow{MN}=\left(d;\frac{de+df}{2}\right)$.

Do đó $AN\perp MN$ vì

$$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN}=d.\frac{e+f}{2}+(-1).\frac{de+df}{2}=0.$$

Qua việc Đại số hóa các bài toán Hình học, ta nhận thấy KN chọn hệ trục tọa độ và gán tọa độ cho mỗi điểm đã cho hoặc điểm cần tìm sao cho phù hợp và tiện ích là một KN quan trọng GV cần trang bị và bồi dưỡng cho HS. Việc chọn tọa độ nào là biến phụ thuộc hoặc biến độc lập là KN cần có khi thực hiện Đại số hóa một bài toán Hình học. Ngoài ra, KN phiên dịch mỗi tính chất Hình học thành những tính chất Đại số, Số học thông qua các công cụ như phương trình, hệ phương trình, hàm số, đa thức, công thức đại số là cần thiết trong luyện tập giải toán cho HS.

Trong quá trình dạy giải các bài tập đã nêu, GV có thể hướng dẫn HS tìm lời giải bằng những câu hỏi dẫn dắt, có tính chất gợi mở phù hợp. Chẳng hạn, đối với bài toán này, ta nên chọn gốc và các trục tọa độ như thế nào? Hãy xác định tọa độ của các điểm với tọa độ đã chọn? Hãy diễn đạt tính chất Hình học này bằng các phương trình Đại số? Những tọa độ nào là biến phụ thuộc và biến độc lập?

Với thời gian học tập ngoài giờ, GV có thể tạo ra những sân chơi bổ ích cho HS luyện tập diễn đạt một số tính chất Hình học bằng ngôn ngữ Đại số dưới dạng từ đơn giản đến phức tạp. Chẳng hạn, HS phát biểu Định lí Pitago trong Hình học bằng ngôn ngữ diện tích, số học hoặc lượng giác; phát biểu về điều kiện vuông, nhọn, tù của một góc trong tam giác bằng bất đẳng thức trên số đo của các cạnh,...

3. Kết luận

Việc định hướng cho lời giải bài toán Hình học bằng phương pháp Đại số nhằm khai thác những vẻ đẹp thống nhất của Toán học là điều khó khăn đối với HS trung học phổ thông. Đa số HS giải toán trong lĩnh vực nào thì thường sử dụng công cụ và phương pháp của lĩnh vực đó. Với kiến thức cơ bản về Đại số và Hình học cùng sự hướng dẫn của GV, việc nhận dạng, phân loại để vận dụng, sáng tạo đưa ra cách giải đẹp và hiệu quả là điều hoàn toàn có thể thực hiện được trong giải toán Hình học bằng công cụ Đại số và ngược lại. Trong thực tế giảng dạy, chúng tôi đã lựa chọn được một hệ thống bài tập phù hợp và khảo sát, đánh giá khả năng vận dụng vào thực tế học tập và tính khả thi của các biện pháp đề xuất theo hướng đã nêu ở trên đối với từng HS.

Tạo hứng thú và niềm đam mê cho HS trong dạy học Toán nhằm nâng cao hiệu quả của quá trình dạy và học. Qua kinh nghiệm giảng dạy thực tế, các tác giả nhận thấy việc vận dụng kiến thức Đại số vào giải các bài toán Hình học giúp HS có cách nhìn tổng quan về sự liên hệ chặt chẽ giữa Hình học và Đại số. Từ đó, kích thích tính tò mò và sáng tạo, góp phần nâng cao KN tiếp cận giải quyết vấn đề trong học tập môn Toán cũng như trong cuộc sống cho HS. Nhờ sự cải tiến trong dạy và học, việc tranh luận cởi mở với HS và để HS trao đổi phản biện lời giải các bài toán Hình học giúp GV vững vàng hơn trong nghề nghiệp của mình.

Khai thác vẻ đẹp thống nhất của Toán học không chỉ hướng đến tình yêu Toán học mà còn truyền cảm hứng cho HS vươn tới sự sáng tạo để tìm tòi những cái mới, cái đẹp trong cuộc sống. Các ví dụ trên đây như minh chứng cụ thể về khai thác vẻ đẹp của sự thống nhất giữa hai lĩnh vực Đại số và Hình học trong chương trình Toán học phổ thông.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Lê Tuấn Hoa, (2003), *Đại số máy tính cơ sở Groebner*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[2]. Hà Huy Khoái, (2007), *Các nhà Toán học được Giải thưởng Fields (1936 - 2006),* NXB Giáo dục, Hà Nội.

[3]. Theoni Pappas, (1994), *Sự kì diệu của Toán học* (Bản dịch tiếng Việt), NXB Dân Trí, Hà Nội.

[4]. Rene Vidal - Yi Ma - S. Sahankar Sastry, (2016), *Gerenalized Principal Component Analysis,* Springer - Verlag New York.

EXPLOITING THE BEAUTY OF THE MATHEMATICS UNITY THROUGH DOING SOME PLANE GEOMETRY EXERCISES BY USING ALGEBRA METHOD

Nguyen Thanh Quang - ***Vinh University***
Email: ntquang144@yahoo.com
Nguyen Van Tha - ***Phung Hung high school -Hochiminh city***
Email: thamaths@gmail.com

Abstract: *Using algebra method to do some geometric problems towards exploiting the unity beauty of Mathematics aims to create excitement, interest and confidence in learning to maximize learners' creativeness. Beside doing Maths exercises by geometry, students need to be guided to do Maths exercises by Algebra and skills to change exercises into other forms in perfect unity of Mathematics. Then, students' curiosity and creativity will be engaged, contributes to enhancing problem solving skills in Mathematics learning and in life as well.*

Keywords: *Maths; plane geometry exercise; Algebra method.*