



RÈN LUYỆN CHO NGƯỜI HỌC CÁC HÌNH THỨC CHUYỂN ĐỔI NGÔN NGỮ DIỄN ĐẠT BÀI TOÁN NHẪM BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC PHÁT HIỆN GIẢI PHÁP GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

TS. PHAN ANH TÀI

Trường Đại học Sài Gòn

1. Đặt vấn đề

Trong dạy học (DH) Toán, có những vấn đề trong trạng thái ban đầu, người học khó phát hiện ra giải pháp giải quyết vấn đề (GQVĐ). Chuyển đổi ngôn ngữ (CĐNN) là một trong những định hướng giúp người học tìm giải pháp GQVĐ. Tuy nhiên, việc hiểu ngôn ngữ diễn đạt và lựa chọn ngôn ngữ để diễn đạt lại bài toán với người học là một vấn đề.

Việc rèn luyện cho người học biết một số hình thức CĐNN diễn đạt bài toán sẽ giúp họ tìm tòi, phát hiện những kiến thức mới liên quan đến chủ đề trong những tình huống học tập; làm tăng khả năng liên tưởng, nhìn nhận vấn đề dưới nhiều góc độ. Việc sử dụng các loại ngôn ngữ khác nhau trong tổ chức DH các kiến thức Toán học không chỉ giúp rèn luyện cho người học năng lực (NL) diễn đạt mà còn khai thác tiềm năng phong phú của các phương pháp toán học ở mỗi loại ngôn ngữ. Hoạt động này bồi dưỡng cho người học NL phát hiện giải pháp GQVĐ.

2. Ngôn ngữ và ngôn ngữ Toán học

Ngôn ngữ là hệ thống những âm, từ, kí hiệu và quy tắc kết hợp dùng để giao tiếp, tư duy. Theo L.X. Vugôtski, "...Ngôn ngữ cũng như các hệ thống tín hiệu khác, thoát đầu là phương tiện giao lưu, trên cơ sở đó, trở thành công cụ của tư duy và sự điều chỉnh hành vi một cách có chủ định..." [1]. Ngôn ngữ có vai trò quan trọng trong tất cả các quá trình tâm lí của con người, đặc biệt là quá trình nhận thức.

Xét ở góc độ thông dụng và chuyên môn, ngôn ngữ gồm hai loại: Ngôn ngữ thông thường và ngôn ngữ khoa học. Ngôn ngữ thông thường là ngôn ngữ được dùng trong giao tiếp thông thường, thiếu trau chuốt, ít gắn với chuẩn mực hay nguyên tắc. Ngôn ngữ khoa học là ngôn ngữ được chọn lọc, gắn liền với những chuẩn mực nguyên tắc, sử dụng trong những văn bản khoa học. Để diễn đạt một vấn đề, ngôn ngữ bao gồm ngữ nghĩa (nội dung) và cú pháp (hình thức diễn đạt).

Ngôn ngữ toán học theo nghĩa hẹp là ngôn ngữ được xây dựng trên hệ thống các thuật ngữ và các kí hiệu toán học. Ngôn ngữ toán học theo nghĩa rộng bao hàm ngôn ngữ toán học theo nghĩa hẹp và hình vẽ, mô hình, biểu đồ, đồ thị,... có tính chất quy ước nhằm diễn đạt các nội dung toán học chính xác, logic và ngắn gọn. Ngôn ngữ toán học có đặc điểm biểu đạt ngắn gọn, logic, đơn trị và không mang sắc thái biểu cảm. Ngôn ngữ toán học sử dụng trong nhà trường phải đáp ứng được các yêu cầu ngắn gọn, chính xác, dễ hiểu và phù hợp với lứa tuổi người học.

3. Chuyển đổi ngôn ngữ diễn đạt bài toán nhằm phát hiện giải pháp giải quyết vấn đề

CĐNN trong DH Toán, người dạy cho người học thấy được quan hệ của các loại ngôn ngữ trong Toán học. Qua đó, người dạy có cơ sở để hướng dẫn và rèn luyện cho người học biết lựa chọn cách diễn đạt một nội

dung toán học theo hướng có lợi cho việc GQVĐ. Người học phải hiểu ngữ nghĩa và cú pháp diễn đạt vấn đề; biết CĐNN và diễn đạt lại vấn đề; sử dụng các thao tác tư duy và kết hợp với các hoạt động khác để phát hiện giải pháp GQVĐ.

Để CĐNN diễn đạt bài toán, người học phải biết hướng biến đổi vấn đề, nhìn thấy mối liên hệ giữa cái đã cho với cái phải tìm hay cái phải chứng minh và mối liên hệ giữa các yếu tố đó với tri thức đã biết. Đồng thời người học thấy được mối liên hệ giữa bài toán cần giải với bài toán có liên quan; đưa về bài toán tương tự đã có cách giải. Với ngôn ngữ diễn đạt mới, việc phát hiện cách giải bài toán thuận lợi hơn, đôi khi phát hiện được cách giải "hay", cách giải đơn giản.

Những bài toán của môn Toán hay các môn học khác có liên quan toán học hay các bài toán thực tiễn có nội dung chứa đựng nhiều kiến thức đan kết với nhau có thể diễn đạt theo ngôn ngữ này hoặc ngôn ngữ khác. NL CĐNN giúp người học có được sự linh hoạt khi làm toán cũng như cách tiếp cận bài toán. Tùy thuộc nội dung bài toán, có một số hình thức CĐNN sau: CĐNN trong cùng một phân môn Toán; CĐNN giữa các phân môn Toán với nhau; CĐNN của môn học khác về ngôn ngữ toán học; CĐNN thực tế về ngôn ngữ toán học (đối với các bài toán liên quan đến Toán học).

Quá trình CĐNN để tìm cách giải bài toán được thực hiện như sau: Từ ngôn ngữ bài toán ban đầu, nhận biết dấu hiệu toán học để chuyển về ngôn ngữ mới thích hợp với lí thuyết toán học; Giải bài toán trong khuôn khổ của lí thuyết toán học theo ngôn ngữ mới; Chuyển kết quả lời giải về ngôn ngữ của bài toán ban đầu.

4. Một số ví dụ chuyển đổi ngôn ngữ diễn đạt bài toán

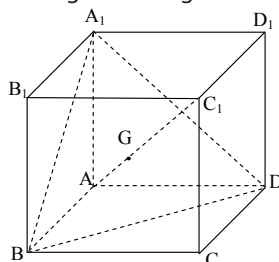
4.1. Chuyển đổi ngôn ngữ trong cùng một phân môn Toán

Quan tâm các đối tượng quan hệ trong bài toán được xem xét, cài đặt trong các mô hình khác nhau; người dạy hướng dẫn người học theo các hướng khác nhau trong cùng một phân môn Toán. Từ đó, phân tích bài toán để tìm cách giải.

Ví dụ: Cho hình lập phương ABCD.A₁B₁C₁D₁. Gọi G là trọng tâm của tam giác BDA₁. Chứng minh rằng ba điểm A, G, C₁ thẳng hàng (Hình 1).

Thông thường, sử dụng ngôn ngữ hình học tổng hợp sẽ có các cách giải: Chứng minh A, G, C₁ thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt; Chứng minh hình chiếu của ba điểm A, G, C₁ theo hai phương khác nhau đều có ảnh là các điểm thẳng hàng;...

Việc phát hiện các cách



Hình 1

giải này không đơn giản. Từ dữ kiện hình lập phương ABCD.A₁B₁C₁D₁ và dấu hiệu nhận biết để CĐNN của bài toán, ta định hướng được các cách giải sau:

- Chuyển bài toán sang ngôn ngữ vectơ: Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Khi đó, A, G, C₁ thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AC_1}$, xác định k. Khai triển các vectơ $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AC_1}$ qua 3 vectơ không đồng phẳng $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; tính được $k = \frac{1}{3}$.

- Chuyển sang ngôn ngữ tọa độ: Chọn hệ tọa độ sao cho A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), D(0, 1, 0), A₁(0, 0, 1); tính tọa độ của trọng tâm G. Chứng tỏ rằng tọa độ của G thỏa mãn phương trình đường thẳng AC₁.

4.2. Chuyển đổi ngôn ngữ giữa các phân môn Toán với nhau

Trong một số bài toán thuộc một phân môn Toán, nếu chỉ sử dụng kiến thức của phân môn Toán đó thì việc tìm cách giải khó khăn hoặc nếu tìm được cách giải thì lời giải phức tạp vì nội dung chứa những yếu tố thuộc kiến thức của phân môn Toán khác (dạng tiềm ẩn). Vấn đề là việc phát hiện được những dấu hiệu trong nội dung bài toán thuộc kiến thức của phân môn Toán khác nhằm giúp người học biết CĐNN diễn đạt, liên tưởng đến các kiến thức cần sử dụng để giải toán. Người dạy hướng dẫn cho người học hình thành những suy nghĩ, rèn luyện những kĩ năng CĐNN trong giải toán; CĐNN giữa các phân môn Toán: Hình học, Đại số, Giải tích,... với nhau.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1} \geq 2$
 $\forall a \in \mathbb{R}$

Đây là bài toán Đại số. Qua trải nghiệm với dấu hiệu nhận biết là các biểu thức dưới dấu căn có thể nghĩ đến việc tọa độ hóa để tìm cách giải bài toán. Phân tích hợp lí các biểu thức dưới dấu căn, biến đổi về dạng tổng bình phương. Khi đó, người học CĐNN đại số của bài toán về ngôn ngữ hình học. Tiếp theo, sử dụng kiến thức độ dài của một vectơ,... Người học định hướng giải bài toán như sau:

$$\text{Phân tích: } a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2;$$

$$a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét hai vectơ:

$$\vec{u} = \left(a + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ và } \vec{v} = \left(a - \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{Khi đó, } |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + a + 1}, |\vec{v}| = \sqrt{a^2 - a + 1}$$

$$\text{và } \vec{u} + \vec{v} = (1; \sqrt{3}), |\vec{u} + \vec{v}| = 2.$$

$$\text{Bất đẳng thức } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$$

Tương đương với

$$\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1} \geq 2, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\text{Dấu "=" khi và chỉ khi } \frac{a + \frac{1}{2}}{-a + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \Leftrightarrow a = 0.$$

4.3. Chuyển đổi ngôn ngữ của môn học khác về ngôn ngữ toán học

Ngoài việc CĐNN trong nội bộ môn Toán để giải toán, người học có thể CĐNN một số bài toán của các môn học khác về ngôn ngữ toán và sử dụng kiến thức toán học để giải. Giải bài toán của các môn như Vật lí, Hóa học, Sinh học,... khi phát hiện trong nội dung có dấu hiệu chứa các yếu tố toán học, các mối quan hệ toán học. Cùng với việc sử dụng kiến thức của các môn học đó, người học tìm cách CĐNN của bài toán về ngôn ngữ toán và sử dụng kiến thức Toán học để giải. Hoạt động CĐNN giúp người học rèn luyện kĩ năng ứng dụng kiến thức toán học vào giải bài toán của môn học khác, nhiều khi phát hiện được cách giải "hay" cho bài toán của các môn học đó.

Ví dụ 2: Bài toán Vật lí: Một mol khí lí tưởng thực hiện biến đổi theo quy luật $P = P_0 - \alpha V^2$. Tìm nhiệt độ cực đại

$T_{\max}$ của khí.

Trước hết người học phải hiểu kiến thức vật lí: Quy luật $P = P_0 - \alpha V^2$ là sự phụ thuộc của áp suất vào thể tích V, trong đó α : Độ biến thiên thể tích tương đương với mỗi đơn vị áp suất thay đổi, gọi là suất nén đẳng nhiệt.

Biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng vật lí trong bài toán; đối với khí lí tưởng (hay khí xem như khí lí tưởng).

Điều kiện là: Nhiệt độ chuẩn là nhiệt độ $0^\circ\text{C} = 273^\circ\text{K}$;

Áp suất chuẩn $P_0 = 1\text{atm} = 1,013 \times 10^5\text{Pa}$.

Phương trình trạng thái khí lí tưởng: $PV = RT$.

R: Hằng số khí lí tưởng, $R = 8,31\text{J/mol}^\circ\text{K}$

T là nhiệt độ khối khí ở áp suất P, thể tích V

Biến đổi: $PV = RT$

$$\Leftrightarrow (P_0 - \alpha V^2)V = RT \quad (1)$$

Trong đó, P_0, α, R là các hằng số, V thay đổi và T phụ thuộc V.

Dấu hiệu toán học trong nội dung bài toán Vật lí là các yếu tố biến thiên, yếu tố không đổi và mối quan hệ

hàm. Tiếp tục biến đổi, (1) $\Leftrightarrow T = \frac{PV}{R} = \frac{P_0}{R}V - \frac{\alpha}{R}V^3$

Nhận biết được dấu hiệu toán học trong bài toán Vật lí, người học CĐNN vật lí về ngôn ngữ toán. Xem T là hàm số của biến số V, ta có bài toán: Tìm giá trị cực đại

$T_{\max}$ của hàm số $T = -\frac{\alpha}{R}V^3 + \frac{P_0}{R}V$. Dùng đạo hàm, việc

giải bài toán này đơn giản.

4.4. Chuyển đổi ngôn ngữ thực tế về ngôn ngữ toán học (đối với các bài toán thực tế liên quan đến Toán học)

Các bài toán thực tế liên quan đến Toán học là các bài toán có nội dung thực tế, diễn đạt bằng ngôn ngữ thông thường. Điều quan trọng là tập luyện cho người học biết xác định đại lượng, phát hiện mối liên quan giữa các đại lượng, biểu thị những tình huống thực tế bằng

(Xem tiếp trang 25)