LÍ THUYẾT BA THẾ GIỚI TOÁN HỌC VÀ VẬN DỤNG VÀO DẠY HỌC ĐẠO HÀM

TS. TRẦN KIÊM MINH - Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế
ThS. PHẠM VĂN TUÂN - Trường THPT Số 5 Quảng Trạch, Quảng Bình
ThS. LÊ THỊ BẠCH LIÊN - Trường Đại học Quảng Bình

1. Đặt vấn đề

Các nghiên cứu trong giáo dục toán cho thấy những khái niệm của giải tích toán học như giới hạn, đạo hàm, tích phân... nhìn chung là những khái niệm trừu tượng và khó đối với đa số học sinh (HS) phổ thông. Một trong những khó khăn là HS không thấy được bản chất của các khái niệm này trong các phạm vi biểu đạt và thao tác khác nhau. Chẳng hạn, khái niệm đạo hàm xuất phát từ các bài toán về độ thay đổi của chuyển động hay độ dốc của một đường cong. Trượt bàn tay theo một đường cong vẽ trên bảng cho ta cảm nhận về độ dốc thay đổi tại mỗi điểm trên đường cong đó. Những trải nghiệm dựa trên trực giác, cảm giác hay hành động trên các đối tượng trong phạm vi thế giới vật lí, như vậy là cơ bản và mang tính chất nền tảng ban đầu cho việc nhận thức khái niệm đạo hàm. Tư duy toán học của HS sẽ được phát triển lên một cấp độ cao hơn khi các em được thao tác trong phạm vi các kí hiệu hay biểu tượng toán học liên quan đến khái niệm này.

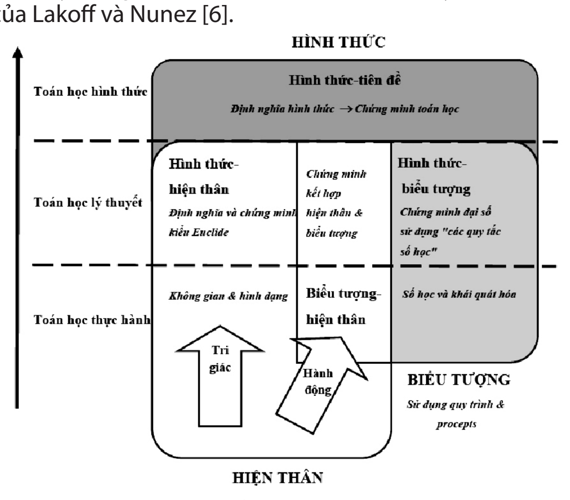
Để đặc trưng quá trình phát triển nhận thức chuyển từ tư duy toán học cơ bản sang tư duy toán học hình thức bậc cao, Tall đã xây dựng một khung lí thuyết trong đó phân biệt "ba thế giới biểu đạt và thao tác toán học" (three worlds of mathematics) khác nhau là "hiện thân ý niệm" (conceptual embodiment), "biểu tượng hóa thao tác" (operational symbolism) và "hình thức hóa tiên đề" (axiomatic formalism) [1]. Khung lí thuyết về ba thế giới toán học của Tall đã được nhiều nhà nghiên cứu giáo dục toán phát triển và vận dụng vào nghiên cứu dạy học các khái niệm khác nhau như hàm số, giới hạn, không gian véctơ.... Chẳng hạn, Christou và cộng sự đã vận dụng lí thuyết này vào ngữ cảnh dạy học hàm số. Các tác giả đã phân tích tư duy của HS thể hiện qua việc giải quyết các nhiệm vụ toán liên quan đến chủ đề hàm số trong ba thế giới toán học [2]. Stewart và Thomas đã vận dụng khung lí thuyết này vào nghiên cứu nhận thức của sinh viên đối với các khái niệm tổ hợp tuyến tính và độc lập tuyến tính [3]. Nghiên cứu đã chỉ ra rằng, sinh viên gặp khó khăn để thông hiểu các định nghĩa hình thức, đồng thời chỉ ra rằng phạm vi hiện thân cung cấp một bổ sung có ý nghĩa cho sự phát triển nhận thức của sinh viên liên quan đến các khái niệm này.

Chúng tôi giới thiệu khung lí thuyết về ba thế giới biểu đạt và thao tác toán học được xây dựng, phát triển bởi Tall đồng thời vận dụng nó vào ngữ cảnh dạy học đạo hàm ở phổ thông. Cụ thể hơn, trong nghiên cứu này, chúng tôi sẽ phân tích các khía cạnh nhận thức của HS lớp 11 về chủ đề đạo hàm qua ba thế giới toán học. Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu tóm tắt khung lí thuyết về ba thế giới toán học và vận dụng vào khái niệm đạo hàm. Sau đó, chúng tôi mô tả phương pháp nghiên cứu và phân tích dữ liệu thực nghiệm. Phần cuối của bài viết, chúng tôi nêu lên các kết luận của nghiên cứu và định hướng vận dụng khung lí thuyết này vào dạy học toán. ***Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số VI1.99-2012.16.***

2. Lí thuyết ba thế giới toán học

Lí thuyết ba thế giới toán học chia sẻ các quan điểm kiến tạo về các giai đoạn phát triển nhận thức cá nhân (tri giác, hành động, phản ánh) của Piaget [4] và các cách thức biểu đạt trí tuệ (biểu đạt qua hành động, biểu đạt hình tượng, biểu đạt biểu tượng) trong quá trình phát triển nhận thức của Bruner [5]. Dựa trên những công trình này, Tall đã mô tả đặc trưng của sự phát triển nhận thức toán học của HS qua ba thế giới biểu đạt và thao tác: Hiện thân ý niệm, biểu tượng hóa thao tác và hình thức hóa tiên đề.

Thế giới hiện thân ý niệm (gọi tắt là hiện thân) là phạm vi của các trải nghiệm cảm giác, hình ảnh và hành động trên các đối tượng (thực hoặc ảo). Trong thế giới này, HS tri nhận đối tượng qua trực giác, thao tác, hành động với sự hỗ trợ của ngôn ngữ. Các hoạt động trong phạm vi này cung cấp nền tảng ban đầu cho sự phát triển nhận thức của HS về đối tượng toán học hướng đến. Khái niệm thế giới hiện thân ở trên được kế thừa từ các kết quả gần đây trong khoa học nhận thức như lí thuyết hiện thân của Lakoff và Nunez [6].



Hình 1: Ba thế giới toán học theo Tall

Thế giới biểu tượng hóa thao tác (gọi tắt là biểu tượng) đề cập đến các biểu tượng (symbols) mà chúng ta sử dụng để tính toán trong số học hoặc là thao tác để biến đổi hình thức trong đại số, giải tích... Trong thế giới này, mỗi biểu tượng toán học có thể được nhìn nhận đồng thời dưới hai khía cạnh: Một quá trình thao tác hoặc một đối tượng (hay khái niệm) toán học. Gray và Tall đưa ra khái niệm procept để mô tả vai trò đối ngẫu này của một biểu tượng hay kí hiệu toán học. Một procept là tập hợp của ba thành phần: Một quá trình thao tác và tính toán cho phép hình thành nên một đối tượng toán học và một biểu tượng biểu đạt quá trình hoặc đối tượng đó. Chẳng hạn, biểu tượng $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ có thể nhìn nhận đồng thời dưới hai góc độ: Quá trình tính toán giới hạn (x dần tới a và $f(x)$ dần tới L) hoặc đối tượng (hay khái niệm) toán học "giới hạn hàm số tại một điểm". Bản chất đối ngẫu này của các biểu tượng toán học cho phép chúng ta thực hiện các thao tác tính toán và biến đổi hoặc để tư duy về một khái niệm hay đối tượng toán học liên quan [7].

Thế giới hình thức hóa tiên đề (gọi tắt là hình thức) liên quan đến các đối tượng toán học được định nghĩa hình thức dựa trên tiên đề. Đây là phạm vi của toán học hình thức và chặt chẽ trong đó các tính chất được suy ra bằng suy luận diễn dịch và chứng minh hình thức dựa trên các định nghĩa và tiên đề. Phạm vi này tương ứng với mức độ cao hơn trong tư duy toán học của HS.

Mỗi thế giới toán học có đối tượng, hình thức biểu đạt và kiểu hợp thức chân lí khác nhau. Trong thế giới hiện thân, các đối tượng toán học được phân biệt bởi các đặc trưng hình ảnh, vật lí và việc nhận thức các đối tượng được dựa trên trực giác, cảm giác, vận động... Trong phạm vi này, việc hợp thức một lập luận chỉ dựa trên các tính chất được tri nhận bằng trực giác, cảm giác. Trong thế giới biểu tượng, mỗi đối tượng toán học là kết quả của một quá trình và được biểu đạt bởi một biểu tượng hay kí hiệu toán học. Việc hợp thức chân lí trong phạm vi này dựa trên tính toán và thao tác trên các biểu tượng. Trong thế giới hình thức, các đối tượng toán học đã được hình thức hóa bằng định nghĩa và tiên đề. Việc hợp thức một lập luận trong phạm vi hình thức dựa trên các chứng minh toán học.

3. Ba thế giới toán học trong ngữ cảnh đạo hàm

Đạo hàm là một trong những khái niệm cơ sở của giải tích toán học. Lịch sử khái niệm đạo hàm gắn liền với lịch sử của phép tính vi tích phân. Các nghiên cứu lịch sử và tri thức luận cho thấy khái niệm đạo hàm được hình thành từ hai ngữ cảnh: Ngữ cảnh thứ nhất là các bài toán trong vật lí như vận tốc tức thời, tốc độ thay đổi của một đại lượng; ngữ cảnh thứ hai là các bài toán tìm cực trị và xác định tiếp tuyến của của một đường cong. Nghiên cứu của Grabiner cho thấy khái niệm đạo hàm được sử dụng đầu tiên như một công cụ để giải quyết các bài toán đặt ra trong hai ngữ cảnh trên, sau đó được mới được khám phá và phát triển, cuối cùng được định nghĩa hình thức một cách chặt chẽ [8]. Khái niệm đạo hàm có thể được xem xét trong nhiều hệ thống biểu đạt khác nhau như số học, đồ thị, biểu tượng. Đặc điểm này mang đến những tiềm năng để nhận thức khái niệm này trong ba thế giới toán học.

Trong thế giới hiện thân, HS có cơ hội trải nghiệm với các hình ảnh trực quan khác nhau liên quan đến ý nghĩa đạo hàm. Chẳng hạn, trượt bàn tay theo một đường cong cho trước cho ta cảm nhận về độ dốc tại từng điểm của đường cong đó. Phóng to lân cận của một điểm nào đó của đường cong cho ta cảm nhận khác nhau về dáng điệu đường cong tại lận cận đó: Nếu hàm số biểu diễn đường cong có đạo hàm trong lân cận đó thì phần đường cong trong lân cận đó trông giống đường thẳng (tính thẳng hàng địa phương); Nếu hàm số biểu diễn đường cong không có đạo hàm tại một điểm trong lận cận thì tại đó đường cong bị "gãy".

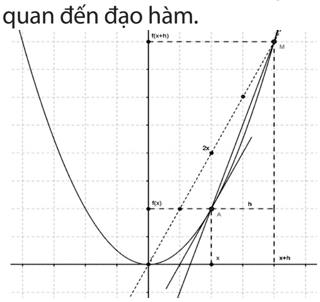
Hình 2 : Trải nghiệm trong thế giới hiện thân với khái niệm đạo hàm

Những hình ảnh trực quan về độ dốc hay tính thẳng hàng địa phương trong thế giới hiện thân cung cấp nền tảng ban đầu cho sự phát triển nhận thức của HS về đạo hàm. Trong thế giới biểu tượng, HS có cơ hội liên kết những hình ảnh này với các biểu tượng và kí hiệu đại số của đạo hàm. Chẳng hạn, việc tính toán độ dốc của tiếp tuyến tại điểm một điểm được hỗ trợ bởi hình ảnh trực quan trong thế giới hiện thân. Thế giới hình thức dành cho định nghĩa đạo hàm, các tính chất liên quan đến đạo hàm.

Độ dốc của cát tuyến AM của đồ thị hàm số $f(x) = x^2$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

Khi h nhỏ, độ dốc ổn định ở quanh giá trị $2x$.



Hình 3: Thao tác trong thế giới biểu tượng

Như vậy, khái niệm đạo hàm có những khía cạnh đặc trưng có thể được biểu đạt và thao tác trong ba thế giới toán học ở trên. Trong nghiên cứu này, chúng tôi sẽ xem xét các đặc trưng này thể hiện qua việc thiết kế các nhiệm vụ toán phù hợp cho từng phạm vi và phân tích tư duy HS thể hiện như thế nào trong ba thế giới toán học.

4. Phương pháp nghiên cứu

Đối tượng tham gia vào khảo sát thực nghiệm gồm 30 HS lớp 11 ở một trường trung học phổ thông trên địa bàn tỉnh Quảng Bình. Phần lớn HS có trình độ ở mức trung bình khá. Dữ liệu được thu thập bằng cách sử dụng một phiếu học tập và bài phỏng vấn nửa cấu trúc. Phiếu học tập bao gồm tám bài toán với các nhiệm vụ được thiết kế dựa trên khung lí thuyết về ba thế giới toán học. Các phỏng vấn cá nhân được thực hiện trong khoảng thời gian ba tuần sau khi hoàn thành thu thập dữ liệu từ phiếu học tập với mục đích tìm hiểu sâu hơn nhận thức của HS liên quan đến đạo hàm.

5. Kết quả nghiên cứu

5.1. Trong thế giới hiện thân

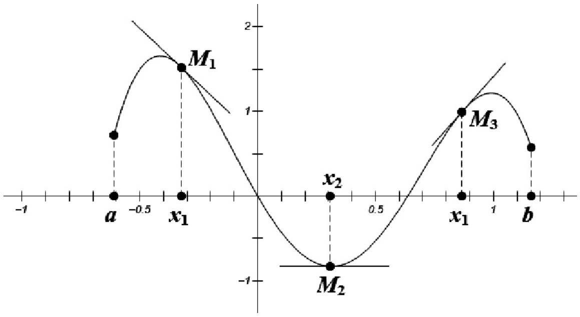
Chúng tôi thiết kế bài tập sau đây để phân tích tư duy của HS về đạo hàm trong thế giới hiện thân. Mục tiêu của bài toán là từ hình ảnh trực quan đã cho về đồ thị hàm số và hướng hoặc độ dốc của tiếp tuyến HS nhận ra mối liên hệ với dấu của đạo hàm tại một điểm. HS có thể dựa vào hướng của tiếp tuyến hoặc góc giữa tiếp tuyến với trục hoành để trả lời các câu hỏi.

Bài tập 1. *Hình bên là đồ thị hàm số y= f(x) trên khoảng (a;b). Biết rằng tại các điểm M_1, M_2 và M_3, đồ thị hàm số có các tiếp tuyến được thể hiện trong hình vẽ. Dựa vào hình vẽ em hãy nêu nhận xét về:*

a) Dấu của $f'(x_1)$? Giải thích ?

b) Dấu của $f'(x_2)$? Giải thích?

c) Dấu của $f'(x_3)$? Giải thích ?



Kết quả thực nghiệm cho thấy câu a) có 18 HS trả lời đúng, 12 HS trả lời sai hoặc không có câu trả lời. Trong 18 HS trả lời đúng có 11 HS giải thích thông qua khái niệm "độ dốc" của đường tiếp tuyến đã được giáo viên giới thiệu trước đó, 7 HS còn lại dựa vào góc giữa đường tiếp tuyến với trục hoành Ox. Câu b) có 15 HS đưa ra đáp án đúng, 15 HS còn lại đưa ra đáp án sai. Trong số 15 HS đưa ra đáp án đúng có 8 HS sử dụng "độ dốc" trong giải thích của mình, 7 HS còn lại tìm góc giữa tiếp tuyến tại điểm và trục hoành cho giải thích của mình.

Giải thích theo độ dốc của tiếp tuyến	
Xuân Đức	$f'(x_1)$ mang dấu âm. vì chiều của tiếp tuyến đi từ trên xuống, nghịch biến nên $f'(x_1) < 0$
Lí	Giải thích: Vì từ trái qua phải tiếp tuyến hàm số tại x_1 đi xuống hệ số góc $k_1 < 0 \Rightarrow f'(x_1) < 0$
Giải thích theo góc giữa tiếp tuyến với trục hoành	
Phong	Giải thích: Từ đồ thị ta thấy tiếp tuyến của đths $y = f(x)$ tại $M_1(x_1; f(x_1))$ đi xuống từ trái sang phải nên $\alpha_1 > 90° \Rightarrow \tan\alpha_1 < 0$ mà $f'(x_1) = \tan\alpha_1$ nên $f'(x_1) < 0$
Xuân Đức	Giải thích: tiếp tuyến đi qua điểm M_2 với trục hoành tạo một góc có giá trị dương vì x_2 đường nằm ngang đường tiếp tuyến có chiều đi lên nên $f'(x_2)$ đồng biến nên mang dấu dương

Câu c) có 16 HS trả lời đúng, 14 HS trả lời sai hoặc không có câu trả lời. Nhìn chung, phần lớn HS có thể giải thích dấu của các đạo hàm chỉ dựa vào hình ảnh đồ thị và tiếp tuyến. Một số HS cố gắng tính chính xác giá trị x_1, x_2, x_3 và xác định công thức hàm số rồi tính đạo hàm tại điểm đó nhưng không thành công. Điều này có thể được giải thích rằng do trong thực hành dạy học đạo hàm hiện tại, HS chủ yếu quen thuộc với các bài tập liên quan đến thao tác và tính toán trong thế giới biểu tượng hơn trong thế giới hiện thân.

5.2. Trong thế giới biểu tượng

Chúng tôi chọn bài toán sau chứa đựng các khía cạnh đặc trưng thuộc thế giới biểu tượng để phân tích tư duy của HS.

Bài tập 2. a) Hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi đẳng thức

$x^2y + 2y = 2x^2 - xy + 1$. Tìm đạo hàm y' ?

b) Đạo hàm của một hàm số $f(x)$ là $f'(x) = ax^2 + b$. Với những giá trị nào của a và b thì độ dốc của tiếp tuyến với với đồ thị hàm f tại x = 0 sẽ nhận giá trị dương? Giải thích ?

Ở thế giới biểu tượng, HS chủ yếu tính toán và thao tác trên các biểu tượng và kí hiệu liên quan đến đạo hàm. Chúng tôi thiết kế bài tập này nhằm xem xét khả năng tính toán và lập luận của HS liên quan đến đạo hàm tại một điểm, trong mối liên hệ với hình ảnh về độ dốc của tiếp tuyến trong bài tập thứ nhất. Câu a) có 25 HS đưa ra được đáp án chính xác cho yêu cầu tính đạo hàm của hàm số được cho bởi đẳng thức $x^2y + 2y = 2x^2 - xy + 1$, tất cả các HS đưa ra câu trả lời chính xác đều biết cách đưa phương trình đã cho về dạng hàm số $y = f(x)$. Có 3 HS biến đổi sai trong quá trình này nên không đưa ra được hàm số đúng, 2 HS còn lại đã không đưa ra được câu trả lời. Ở câu b), có 16 HS đưa ra được câu trả lời đúng. Trong 14 HS trả lời chưa chính xác hoặc không có câu trả lời có 8 HS đưa ra đáp án $b > 0$ mà không cần quan tâm đến giá trị của a, 5 HS đưa ra những giải thích không chính xác và 1 HS không đưa ra được câu trả lời. Sau đây là giải thích của một số HS cho câu hỏi b):

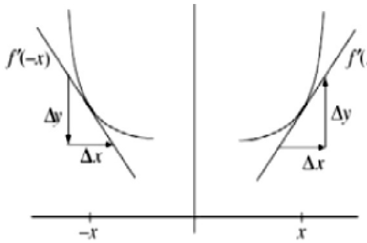
HS	Giải thích
Hiếu	- Độ dốc của tiếp tuyến là đạo hàm của f tại x = 0 $f'(0) = a.0^2 + b = b$ Để $f'(0) > 0 \Leftrightarrow b > 0$ Vậy với $a \in \mathbb{R}$ và $b > 0$ thì độ dốc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số f tại x = 0 nhận giá trị dương
Phong	Khi x = 0 thì $f'(0) = b$ Độ dốc của tiếp tuyến nhận giá trị dương khi $b > 0$ với mọi a.

5.3. Phối hợp ba thế giới

Để xem xét HS nhận thức như thế nào và trong thế giới nào trước một bài toán cho trước, chúng tôi thiết kế một nhiệm vụ cho phép HS có thể xem xét nó trong cả ba thế giới là hiện thân, biểu tượng và hình thức. Nội dung của nhiệm vụ toán này dựa theo tài liệu của Tall [9] :

Bài tập 3. *Hãy giải thích tính đúng sai của mệnh đề: "Đạo hàm của một hàm số chẵn là một hàm số lẻ" với giả thiết rằng hàm số có đạo hàm trên tập số thực $\mathbb{R}$.*

Đối với bài tập này, HS có thể xem xét và giải thích trong các thế giới biểu đạt và thao tác khác nhau. Chẳng hạn, trong thế giới hiện thân, HS có thể dựa vào tính đối xứng của đồ thị một hàm số chẵn qua trục tung để suy ra tính đối nhau của độ dốc của các tiếp tuyến tương ứng tại hai điểm bất kì đối xứng nhau qua trục tung như sau:



HS cũng có thể lập luận và tính toán, biến đổi dựa trên các kí hiệu của đạo hàm để giải thích cho câu trả lời, tức là làm việc trong thế giới biểu tượng. HS có thể lập luận một cách khái quát hơn trong thế giới hình thức như sau: Từ đẳng thức $f(-x) = f(x)$, lấy đạo hàm hai vế và theo quy tắc đạo hàm của hàm hợp ta được $f'(-x) = -f'(x)$. Vậy $f'(x)$ là hàm số lẻ.

Dữ liệu thực nghiệm cho thấy, hầu hết HS đều giải thích và trả lời bài toán đưa ra trong thế giới biểu tượng, bằng cách biến đổi dựa trên biểu thức đạo hàm. Một số bài làm sau đây minh họa điều đó :

HS	Giải thích
Thúy Hằng	$f'(-x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ Đặt $t = -\Delta x$ $f'(-x) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{-t} = -\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t} = -f'(x)$ Vậy $f'(-x) = -f'(x)$ vậy đây là hàm số lẻ.
Thái Hùng	Ta cần CM: $-f'(-x) = f'(x)$ Ta có: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $f'(-x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}$ $= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ Đặt: $t = -\Delta x$ $\Rightarrow f'(-x) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{-t}$ $= -\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ Vậy: $f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow$ hàm số $f'(x)$ là hàm số lẻ

Các cách giải thích dựa trên đồ thị, hình ảnh trực quan trong thế giới hiện thân hoặc lập luận hình thức không được HS sử dụng trong bài tập này. Điều này có thể được lí giải như là ảnh hưởng của thể chế dạy học đạo hàm hiện tại đến nhận thức của HS. Thực tế, hệ thống các bài tập trong sách giáo khoa về đạo hàm chủ yếu để cập đến thao tác tính toán và biến đổi thuộc thế giới biểu tượng. Các bài toán có liên quan đến đạo hàm trong thế giới hiện thân còn rất hạn chế.

6. Kết luận

Lí thuyết về ba thế giới toán học cung cấp một mô hình cho phép phân tích và hiểu về sự phát triển nhận thức toán học của HS từ thấp đến cao. Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã phân tích làm rõ khung lí thuyết này, thiết kế các nhiệm vụ toán thuộc ba thế giới biểu đạt, thao tác khác nhau và xem xét khả năng lập luận của HS trong các thế giới đó. Phân tích các bài làm của HS cho thấy, nhiều HS quen thuộc lập luận trong thế giới biểu tượng. Thế giới hiện thân hỗ trợ tốt cho HS trong bước đầu nhận thức về khái niệm đạo hàm, cung cấp nền tảng để tư duy HS phát triển đến các mức cao và phức tạp hơn.

Theo Tall, trong dạy học các khái niệm giải tích (giới hạn, đạo hàm, tích phân), HS nên được bắt đầu tiếp cận chúng trong thế giới hiện thân trước, sau đó đến thế giới biểu tượng và cuối cùng là thế giới hình thức. Một cách tiếp cận dạy học cổ điển theo thứ tự Định nghĩa - Định lí - Chứng minh sẽ khó để HS có thể phát triển tư duy và hiểu sâu sắc các khái niệm này [1].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Tall, D., (2004), *Thinking through three worlds of mathematics. In M. Johnsen Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.),* Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 281-288). Norway: Bergen University College.

[2]. Christou, C., Pitta-Pantazi, D., Souyoul, A., & Zachariades, T., (2005), *The embodied, proceptual, and formal worlds in the context of functions,* Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 5(2), 241-252.

[3]. Stewart, S., & Thomas, M. O., (2007), *Embodied, symbolic and formal thinking in linear algebra,* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38(7), 927-937.

[4]. Piaget, J., (1970), *Piaget's theory. In Mussen P.H.* (Ed.), Carmichael's handbook of child psychology (pp. 703-732). New York: Wiley.

[5]. Bruner, J. S., (1966), *Towards a theory of instruction,* Cambridge, MA: Harvard University Press.

[6]. Lakoff, G., & Nunez, R., (2000), *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

[7]. Gray, E., & Tall, D. O., (1994), *Duality, ambiguity & flexibility: a proceptual view of simple arithmetic,* Journal for Research in Mathematics Education, 26, 115-141.

[8]. Grabiner, J., (1983), *The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass,* Mathematics Magazine, 56, 195-206.

[9]. Tall, D., (2005), *The transition from embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof. In M. Bulmer, H. MacGillivray & C. Varsavsky (Eds.),* Proceedings of Kingfisher Delta'05, Fifth Southern Hemisphere Symposium on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning (pp. 23-35). Fraser Island, Australia.

[10]. Tall, D., (2008), *The Transition to Formal Thinking in Mathematics,* Mathematics Education Research Jounal, 20(2), 5-24.

[11]. Tall, D., (2013), *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics,* Cambridge University Press.

SUMMARY

The article refers to three Maths world theory and its application into Maths teaching in derivatives. The author focused on research to clarify theoretical framework and analysis of students' thinking in grade 11 shown in three worlds-that called embodiment , symbol and form. The study results showed that the embodiment world is needed to provide the initial platform for the development of students' cognition and thinking about the concept of derivatives, then move to higher level of awareness-realize symbols and forms.

Keywords: *Three Maths world; embodiment thinking, symbol and form thinking; derivatives.*